

„Egy rosszabbul tanított jó tananyag  
rosszabb, mint egy rosszabb tananyag  
jól tanítva.”

Lovász László

A hálózatok frekvenciafüggésének vizsgálata a hírközlés fejlődéséhez kötődően a XX. század első felétől került a figyelem középpontjába. Ma is központi fontosságú az információátvitel gyorsasága, csak ma már az analóg jelek helyett többnyire a digitális jelek átviteli kérdései dominálnak. A rendszerek frekvenciafüggő viselkedésének klasszikus leírásai matematikailag megalapozottak, de didaktikai kidolgozottságuk kifogásolható. Ez a cikk a történetiség felidézése mellett e témakör áramkör-orientált tárgyalását vázolja, ami didaktikai előnyei mellett a Bode-diagramok újraértelmezését és az egyes tagok pontosabb szelektálását is eredményezi.

**Kulcsszavak:** transzfer karakterisztika, Nyquist-diagram, Bode-diagram, pólus-zérus kép, irreducibilitás, rezonancia, jósági tényező, sáv szélesség

Bár az első elektromos vagy elektromágneses elven működő hírközlő berendezéseket, a távírókat már a XIX. század első felében kifejlesztették, majd a század második felében megjelentek a vezetékes telefonok is,<sup>1</sup> de a hírközlés elméleti megalapozása a XX. század közepéig váratott magára. A tudománytörténet az információelméletet Shannon 1948-ban megjelent tanulmányaitól [1] eredezteti, amelyek közvetlenül támaszkodnak Nyquist (1928 [2], 1932 [3]) és Hartley (1928) [4] cikkeire.<sup>2</sup> Az említett publikációk mindegyike a *Bell System Technical Journalban* látott napvilágot, ami a *Bell Telephone Laboratory*<sup>3</sup> időszak kiadványa volt. Ebben a folyóiratban jelent meg 1932-ben Nyquist: *Regenerationtheory* [3], majd 1937-ben Norton: *Constant resistance networks with applications to filter groups* [5] és 1938-ban Bode: *Variable Equalizers* [6] című cikke, amelyekben a négy-pólus-szemlélet térnyerése mellett nyomon követhető, hogy miként vizsgálták a hálóz-

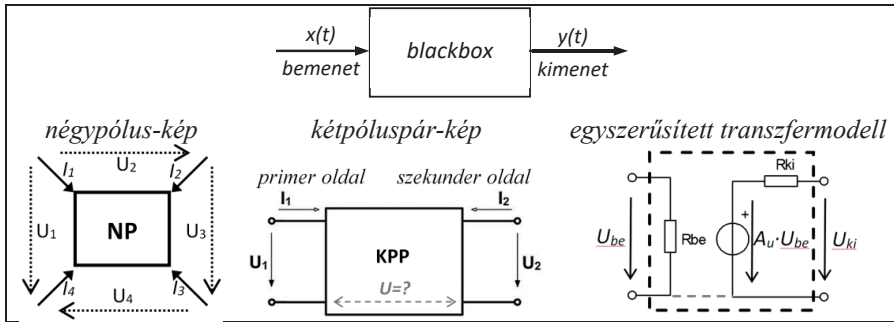
<sup>1</sup> Samuel Morse 1838-ban mutatta be a távíró világszerte elterjedt változatát, Alexander Graham Bell pedig 1876-ban adta be a telefon szabadalmát.

<sup>2</sup> A mintavételezési alaptételt, miszerint a minimális mintavételezési frekvenciának az előforduló legmagasabb frekvenciakomponens kétszeresének kell lennie a jel torzításmentes visszaállíthatóságához, Shannon–Nyquist-tételnek, míg a csatornkapacitásról szóló alaptételt Shannon–Hartley-tételnek is szokás nevezni.

<sup>3</sup> Eredetileg *AT&T Bell Laboratories*, majd *Bell Telephone Laboratories*, ezt követően *Bell Labs* néven szerepelt. A tulajdonos- és névváltásokat követően hivatalosan ma Nokia Bell Labs. (A Bell Telephone Laboratory-ban elért eredmények jelentőségét mutatja, hogy 8 Nobel-díjat is kaptak az elmúlt száz évben. 1956-ban például a tranzisztor feltalálásáért John Bardeen, Walter H. Brattain és William Shockley, a *Bell Telephone Laboratory* munkatársai kaptak meg a fizikai Nobel-díjat.)

tok frekvenciafüggő viselkedését. Ezen írások adják a történeti alapját a ma már standard szemléltetőképként alkalmazott Nyquist- és Bode-diagramoknak.

A négypólus-szemléletet és annak egyszerűsített alternatíváit: a kétpóluspárt és az egyszerűsített transzfer-modellt a blackbox módszer<sup>4</sup> alkalmazásaként vezették be a villamos hálózatok vizsgálatára (1. ábra). Egy-egy áramkör működésénél kérdésként vetődik fel, hogy adott paraméterek (például impedancia, frekvencia) megváltozása miként befolyásolja a négypólus viselkedését. Ez úgyszólván átfogalmazható, hogy a transzfermodell vezérelt generátorának az átviteli tényezőjét, – az 1. ábrán az  $A_u$  feszültséggerősítést – miként befolyásolja az adott paraméter megváltozása.<sup>5</sup> A leggyakoribb, általános vizsgálati szempont a frekvencia megváltozásának a hatása.



1. ábra – A blackbox módszer elve és villamos alkalmazásai

## Az átviteli karakterisztika matematikai alapjai

A bemeneti jelet kimeneti jellé transzformáló leképezés matematikai leírására dolgozták ki a *lineáris invariáns koncentrált paraméterű modellt*, ami egy állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlettel, a rendszer állapotegyenletével adható meg:

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{d^{(k)}y(t)}{dt^k} = \sum_{l=0}^n b_l \frac{d^{(l)}x(t)}{dt^l}$$

<sup>4</sup> A blackbox módszer az úgynevezett viselkedésmoდეllek vizsgálati eljárása. Szakterületenként más terminológia terjedt el az input/output jelekre. A bemeneti/kimeneti jelekre helyenként a biológiai inger-reakció, míg villamos rendszereknél többnyire a gerjesztés-válasz megnevezés a használatos.

<sup>5</sup> A transzfermodellel leírt hálózatok viselkedése DC-gerjesztés mellett relatíve egyszerűen számítható rezisztív elemek, illetve DC vagy proporcionálisan vezérelt generátorok alkalmazásával. Időben változó gerjesztések esetén azonban a hálózatok karakterisztikáiban a gerjesztőjel paramétereitől is függő impedanciák jelen(-het)nek meg, amelyek bonyolítják a hálózat viselkedésének vizsgálatát.

E differenciálegyenlet Laplace-, illetve Fourier-transzformáltja a következő:<sup>6</sup>

$$\left. \begin{array}{l} \text{Laplace-transzformáltja:} \\ \sum_{k=0}^m a_k(s)^k Y(s) = \sum_{i=0}^n b_i(s)^i X(s) \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Fourier-transzformáltja:} \\ \sum_{k=0}^m a_k(j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{i=0}^n b_i(j\omega)^i X(j\omega) \end{array}$$

Ezen egyenletekből származtatható a rendszer *átviteli függvénye*, illetve *frekvenciaátviteli függvénye*,<sup>7</sup> ami az időtartomány helyett a frekvenciatartományba helyezi át a vizsgálatot:

$$\left. \begin{array}{l} \text{átviteli függvény:} \\ H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^i}{\sum_{k=0}^m a_k s^k} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{frekvencia átviteli függvény:} \\ \mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{Y}(j\omega)}{\mathbf{X}(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^n b_i(j\omega)^i}{\sum_{k=0}^m a_k(j\omega)^k} \end{array}$$

A  $\mathbf{H}(j\omega)$  frekvencia átviteli függvény egy valósparaméterű komplex értékű függvény, amelynek szemléltetésére lényegében három grafikus módszer fejlődött ki az idők során.

## A Nyquist-diagram

Nyquist az  $\omega$  valós paraméter szerint ábrázolta a  $\mathbf{H}(j\omega)$  frekvencia átviteli függvény értékeit, az úgynevezett amplitúdó-fázis jelleggörbét a komplex számsíkon. E fogalmilag egyszerű szemléltetés előnye, hogy a kapott görbe egyes pontjainak mint komplex számoknak a valós-képzetes, és abszolútérték-fázisszög koordinátái egyaránt könnyen leolvashatók,<sup>8</sup> de a görbe egyes pontjaihoz tartozó  $\omega$  paraméterérték megállapítása már problémát jelenthet.

<sup>6</sup> E transzformációkat részletesebben ismerteti Márton [7], aki a diszkrét jelek Z-transzformációjára is kitér. Oliver Heaviside [8], aki a vektoranalízis megalapozójaként megadta az eredetileg 20 Maxwell-egyenlet mai alakját, és kidolgozta 1880–87 között a differenciálegyenletek algebrai egyenletté alakításának módszerét. Ebből fejlődött ki a Laplace-transzformáció, ami sok formai hasonlóságot mutat a Fourier-transzformációval. A fenti analógia e két transzformáció linearitását és a deriváláshoz való részben hasonló viselkedését használja ki:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g] & \mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g] \\ \mathcal{L}[f'] = s \mathcal{L}[f] - f(0) \quad s > 0 \text{ esetén} & \mathcal{F}[f'] = j\omega \mathcal{F}[f] \end{array}$$

Tartalmi különbözőségük a két definíció formai összevetéséből, illetve alkalmazásaikból is kiderül:

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \qquad \mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

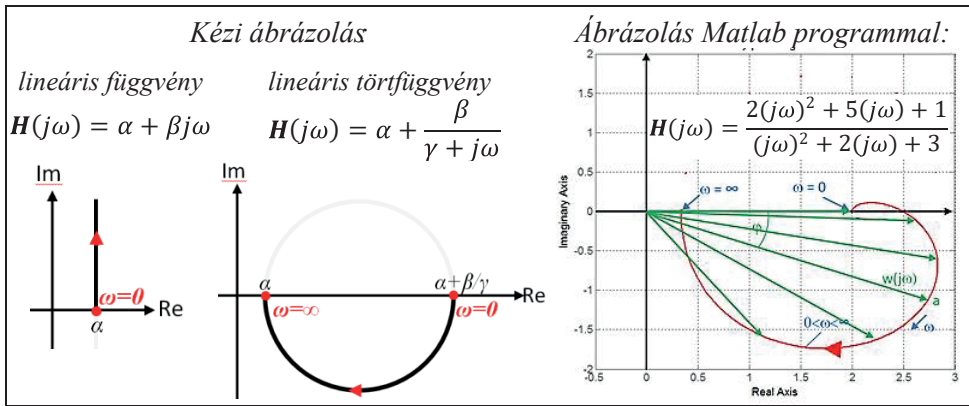
(A Laplace-transzformáció a fenti differenciálegyenletek megoldása mellett persze felhasználható a Fourier-transzformáció együtthatóinak, valamint sorozatok összegének a meghatározására is.)

<sup>7</sup> A  $H(s)$  és a  $\mathbf{H}(j\omega)$  függvény formálisan származtatható egymásból az  $s = j\omega$  helyettesítéssel is, ezért szokás a Laplace-transzformáció  $s$  paraméterét komplex frekvenciának is nevezni. A *frekvencia átviteli függvény* helyett szokásos a *transzfer karakterisztika (átviteli jellemző)* kifejezés használata is. Fodor külön tanulmányt szentelt a *frekvencia átviteli függvény* itt érintett kétféle értelmezésének. [9]

<sup>8</sup> Az úgynevezett Nichols-diagram az amplitúdó-fázis jelleggörbét a komplex számsík polárkoordináta-rendszerében szemlélteti, ahol az egyik tengelyen a fázisszög, a másik tengelyen pedig az abszolútérték szerepel decibelben.

A mai számítástechnikai eszközökkel e görbe megrajzolása könnyű, de kézi szerkesztése csak akkor egyszerű, ha a  $H(j\omega)$  frekvencia átviteli függvény olyan racionális törtfüggvény, amelynek számlálója és nevezője is legfeljebb elsőfokú polinom. Ekkor polinomosztással a frekvencia átviteli függvény alakja  $H(j\omega) = \alpha + \frac{\beta}{\gamma + j\omega}$ , amiből a második tag az a kör,

aminek a sugara és a középpontja egyaránt  $\beta/(2\gamma)$ ,<sup>9</sup> így ebből a frekvencia átviteli függvénygrafikonja e kör  $\alpha$ -val való (vízszintes) eltoltja (2. ábra). A kapott görbéhez készíthető úgynevezett *skála egyenes*, amellyel nomogramszerűen leolvashatók a görbe pontjaihoz tartozó  $\omega$  értékek.<sup>10</sup> A magasabb rendű  $H(j\omega)$  frekvencia átviteli függvények többsége visszavezethető ilyen egyszerű tagok összegére a parciális rész törtre bontás műveletével, de az eredő görbét pontonként kell előállítani az azonos  $\omega$  értékekhez tartozó pontok vektori összegzésével, ami igen hosszadalmas!



2. ábra – Nyquist-diagramok ábrázolásai

## A Bode-diagram

A  $H(j\omega)$  frekvencia átviteli függvény Bode-diagramjának két alapjellemzője a következő:

- a  $H(j\omega)$  komplex (kétdimenziós) értékek abszolútérték és fázisszög koordinátái az  $\omega$  paraméter függvényében külön-külön kerülnek ábrázolásra, aminek eredményeként előáll a  $|H(j\omega)|$  abszolútérték-jelleggörbe<sup>11</sup> és az  $\text{arc}[H(j\omega)]$  fázis-jelleggörbe,

<sup>9</sup> Ennek bizonyítása a következő:  $\left| \frac{\beta}{\gamma + j\omega} - \frac{\beta}{2\gamma} \right| = \left| \frac{\beta[2\gamma - (\gamma + j\omega)]}{2\gamma(\gamma + j\omega)} \right| = \left| \frac{\beta}{2\gamma} \right| \left| \frac{\gamma - j\omega}{\gamma + j\omega} \right| = \left| \frac{\beta}{2\gamma} \right|$ .

<sup>10</sup> Fodor bemutat egy ilyen paraméteregyenes szerkesztési eljárást. [10]

<sup>11</sup> A szakterminológia az abszolútérték helyett (nem túl szerencsésen) inkább az amplitúdó kifejezést használja.

- a módszer lényeges eleme, hogy mind az  $\omega$  paramétert, mind az abszolútértéket logaritmikus skálán jeleníti meg, miáltal e grafikonok több nagyságrend egyidejű szemléltetésére is alkalmasak. (Az abszolútérték logaritmikus léptékére a gyakorlatban a *dB* egység használatos, amely a definíció szerint feszültségerősítésnél az adott arány logaritmusának a 20-szorosa.<sup>12)</sup>

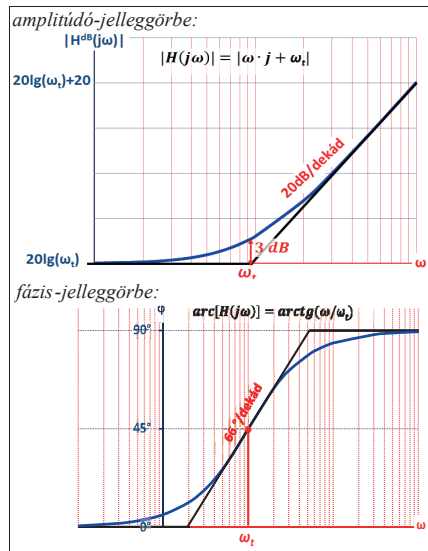
A szorzatalakú  $H(j\omega)$  frekvencia átviteli függvényekre két fontos észrevétel is tehető:

Ha  $H(j\omega) = \frac{H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)}{H_3(j\omega)}$ , akkor

- az abszolútértékre érvényes  $|H| = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_3|}$  azonosság, valamint a logaritmus azonosságai miatt az amplitúdó-jelleggörbére decibelben a következő összefüggés áll fenn:  $H^{dB} = H_1^{dB} + H_2^{dB} - H_3^{dB}$ , így az eredő  $H^{dB}$  amplitúdó-jelleggörbe az egyes tényezők jelleggörbéinek az (előjeles) összege,
- az eredő fázis-jelleggörbe az  $\text{arc}[H] = \text{arc}[H_1] + \text{arc}[H_2] - \text{arc}[H_3]$  azonosság alapján szintén az egyes tényezők fázis-jelleggörbéinek az (előjeles) összege.

Egy lineáris  $H(j\omega) = j\omega + \omega_t$  frekvencia átviteli függvény az alábbi megfontolások alapján egyszerűen vázolható, ha a (kör)frekvencia-skálán is logaritmikus léptéket alkalmazunk:

- Az amplitúdó-jelleggörbét decibelben a  $H^{dB}(j\omega) = 20 \cdot \lg|\omega + \omega_t|$  monoton növekedő függvény írja le, amelynek aszimptotikus viselkedéséről elmondható, hogy  $\omega \rightarrow 0$  esetén a vízszintes  $20 \cdot \lg|\omega_t|$  egyeneshez, míg  $\omega \rightarrow \infty$  esetén a  $20 \cdot \lg|\omega| = 20 \cdot \lg(\omega)$  görbéhez tart, azaz  $\omega$ -t logaritmikus skálán ábrázolva az aszimptota meredeksége  $+20 \text{ dB/dekád}$ . A két aszimptota metszéspontja az  $\omega = \omega_t$  úgynevezett törésponti frekvenciánál van, ahol az eltérés a valódi értéktől  $3 \text{ dB}$ <sup>13)</sup> (3. ábra).



3. ábra - Lineáris tag Bode-diagramja

<sup>12)</sup> A logaritmikus léptéket a telefonkábelek csillapítási jellemzőjeként *transmission unit (TU)* néven a Bell Telephone Laboratory mérnökei vezették be, amit 1923 körül neveztek át *decibelnek* Bell tiszteletére. A *dB* a BIPM ajánlások ellenére is csak meglehetősen későn, 2011-től vált az SI rendszer használható egységévé. (Teljesítményarányok esetén a logaritmus 10-szerese szerepel a definícióban.)

<sup>13)</sup> Egyszerűen belátható:  $20 \cdot \lg|\omega + \omega_t| - 20 \cdot \lg|\omega_t| = 20 \cdot [\lg|\sqrt{2} \omega_t| - \lg|\omega_t|] = 20 \cdot \lg\sqrt{2} = 3 \text{ dB}$ .

- A fázis-jelleggörbe az  $\text{arc}[H(j\omega)] = \text{arc}[lg(j\omega + \omega_t)] = \text{arctg}(\omega/\omega_t)$  monoton növekedő függvény, aminek a határértéke  $\omega \rightarrow 0$  esetén  $0^\circ$ , míg  $\omega \rightarrow \infty$  esetén pedig  $+90^\circ$ , így ez a függvény e két vízszintes egyeneshez konvergál. A törésponti frekvencián a fázisszög  $\text{arctg}(1) = 45^\circ$ , ahol a görbe meredeksége a  $lg(\omega)$  skála miatt  $66^\circ/\text{dekád}$ , azaz a görbe ilyen meredekségű egyenessel közelíthető<sup>14</sup> (3. ábra).

Több lineáris tényező szorzataként előálló frekvencia átviteli függvény Bode-diagramja az (előjeles) összegzési szabály alapján egyszerűen vázolható kézzel is. Egy számlálóban levő tényező például  $+20 \text{ dB/dekád}$ , míg a nevezőben szereplő  $-20 \text{ dB/dekád}$  meredekséggel változtatja meg az amplitúdó-jelleggörbe növekedési meredekségét az aktuális törésponti frekvenciánál.<sup>15</sup>

## A pólus-zérus kép

A polinomok szorzattá alakításáról szól az algebra alaptétele:<sup>16</sup>

*minden polinom lineáris polinomok szorzatára bontható a komplex számtest felett.*

E tétel szerint minden  $H(x)$  racionális törtfüggvény előáll a következő törzstényezős alakban:

$$H(x) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i x^i}{\sum_{k=0}^m a_k x^k} = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (x - z_i)}{\prod_{k=1}^m (x - p_k)}$$

Fogalmilag ez a formális polinomok elméletének az eredménye, ami alapján persze elmondható, hogy ha egy racionális törtfüggvény számlálója  $n$ -ed fokú, akkor a multiplícitásokat figyelembe véve pontosan  $n$  zérushelye van, az  $m$ -ed fokú nevezőjének pedig hasonlóan  $m$  zérushelye van, amelyeknél a törtfüggvény nincs értelmezve, azaz ezek a pólushelyei. (Ez a megfogalmazás a polinomfüggvények körében adott interpretáció.<sup>17</sup>) Egy  $H(x)$  racionális törtfüggvény pólusait és zérushelyeit a komplex számsíkon ábrázolva kapjuk a pólus-zérus képet, ami a szorzatalakban felírt törtfüggvény egy vizuális reprezentációja (4. ábra).

<sup>14</sup> Az  $\text{arctg}$  függvény meredeksége a  $lg(\omega)$  skála mentén a láncszabály alapján:

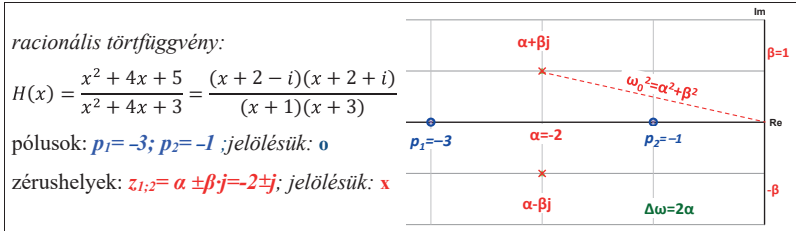
$$\frac{d \text{arctg}(\omega/\omega_t)}{d \omega} = \frac{d \text{arctg}(\omega/\omega_t)}{d \text{lg}(\omega)} \cdot \frac{d \text{lg}(\omega)}{d \omega} \quad \text{bő} \quad \frac{d \text{arctg}(\omega/\omega_t)}{d \text{lg}(\omega)} = \frac{\ln 10 \cdot (\omega/\omega_t)}{1 + (\omega/\omega_t)^2},$$

azaz  $\omega = \omega_t$  esetén  $\frac{\ln(10)}{1+1^2} \approx 1,15 \text{ rad/dekád} \approx 66^\circ/\text{dekád} \approx 90^\circ/1,5 \text{dekád}$ .

<sup>15</sup> Az  $\omega = 0$  eset karakterisztikája az  $(1;0)$  ponton átmenő  $+20 \text{ dB/dekád}$  meredekségű egyenes töréspont nélkül.

<sup>16</sup> E tétel (közel) hiánytalan bizonyítását először Carl Friedrich Gauss közölte 1799-es doktori disszertációjában, majd a következő 50 évben további 3 bizonyítást is adott rá.

<sup>17</sup> A (formális) polinomok elmélete különbözik a polinomfüggvények elméletétől.



4. ábra – Egy  $H(x)$  racionális törtfüggvény pólus-zérus képe

Mivel az állapotegyenlet együtthatói valósak, tehát az itt szereplő polinomok együtthatói is valósak, így a pólusok és a zérushelyek szükségszerűen vagy valós számok, vagy komplex konjugált gyökpárok, ezért az algebra alaptétele itt úgy fogalmazódik át, hogy minden valós együtthatós polinom lineáris és irreducibilis másodfokú valós együtthatós polinomok szorzataként áll elő, azaz a valós polinomok általános törzstényező alakja a következő:

$$H(x) = K \cdot \prod_i (x - z_i) \cdot \prod_k (x^2 + c_k x + d_k^2)^{18}$$

A  $H(j\omega)$  frekvencia átviteli függvény esetében egy  $z_{i,2} = \alpha \pm \beta j$  komplex konjugált gyökpár okozta irreducibilis másodfokú tag az  $\alpha$  és  $\beta$  együtthatókkal kifejezve a következő alakot ölti:

$$\mathbf{H}(j\omega) = [(j\omega) - \alpha + \beta \cdot j] \cdot [(j\omega) - \alpha - \beta \cdot j] = [(j\omega)^2 - 2\alpha(j\omega) + \alpha^2 + \beta^2],$$

ezért egy általános  $\mathbf{H}(j\omega)$  frekvencia átviteli függvény törzstényező alakja a következő:

$$H(j\omega) = K \cdot \frac{\prod_i [(j\omega) - z_i] \cdot \prod_z [(j\omega)^2 + 2\alpha_z(j\omega) + (\alpha_z^2 + \beta_z^2)]}{\prod_k [(j\omega) - p_k] \cdot \prod_p [(j\omega)^2 + 2\alpha_p(j\omega) + (\alpha_p^2 + \beta_p^2)]}$$

ahol  $K, z_i, p_i, \alpha_i$  és  $\beta_i$ , egyaránt valós számok.<sup>19</sup>

## Másodfokú tagok Bode-diagramja

A másodfokú tagok Bode-diagramjának vázolására az alábbiakban a szakirodalomban megszokottól némileg eltérő eljárás kerül ismertetésre, amelynek főbb jellemzői és előnyei a következőkben foglalhatók össze:

1. Az elemzés egyszerűségét alkalmazásorientáltsága biztosítja, ugyanis áramkör szempontú fogalmakkal operál, ami didaktikai aspektusokból is előnyös.

<sup>18</sup> Az irreducibilitási feltétel miatt a  $(c_k; d_k)$  számpárookra teljesül a  $c_k^2 < 4d_k^2$ , azaz  $|c_k| < 2|d_k|$  összefüggés.

<sup>19</sup> Fontos, hogy a pólus-zérus kép alapján a  $\mathbf{H}(j\omega)$  frekvencia átviteli függvény szorzattá alakításának a célja az úgynevezett *törésponti frekvenciák* megállapítása, míg a formailag analóg  $H(s)$  átviteli függvény elemzésekor a zérus-pólus helyek megállapítása más szempontból bír jelentőséggel.

2. A másodfokú tagok megszokott irreducibilitás szempontú felosztása kiegészül a rezonanciajelenség felléptének egyidejű vizsgálatával, ami ráirányítja a figyelmet azon irreducibilis tagokra, amelyeknél még nem lép fel kiemelési jelenség.<sup>20</sup>
3. E módszer eredménye pontosság szempontjából némileg jobb a szokványos eljárásokénál, de ennek a jelentősége a mai számítógépes háttérrel már kicsi.

A másodfokú tagok  $H(j\omega)$  frekvenciaátviteli függvénye a  $\Delta\omega = -2\alpha$  és az  $\omega_0^2 = \alpha^2 + \beta^2$  jelölés bevezetésével a továbbiakban a következő alakban szerepelnek:

$$H(j\omega) = (j\omega)^2 + \Delta\omega \cdot j\omega + \omega_0^2 = \omega_0^2 - \omega^2 + \Delta\omega \cdot j\omega,^{21}$$

ahol a  $\Delta\omega$  paramétert sávszélességnek, az  $\omega_0$ -t *Thomson-frekvenciának* nevezzük.<sup>22</sup> A továbbiakban a különböző esetek áttekintésére a rezgőköröknél szokásos  $Q = \omega_0 / \Delta\omega$  összefüggéssel definiált jósági tényező alapján kerül sor.<sup>23</sup>

A másodfokú tagok amplitúdó-jelleggörbéről általánosan megállapítható, hogy a

$$|H|^{dB} = 20 \cdot \lg |\omega^2 - \omega_0^2 + \Delta\omega \cdot j\omega|$$

függvény aszimptotikusan  $\omega \rightarrow 0$  esetén a vízszintes,  $40 \cdot \lg(\omega_0)$  értékű egyeneshez, míg  $\omega \rightarrow \infty$  esetén a  $20 \cdot \lg|\omega^2| = 40 \cdot \lg(\omega)$  görbéhez, azaz logaritmikus  $\omega$ -skálánál a  $40 \text{ dB/dekád}$  meredekségű egyeneshez konvergál. A két aszimptota (fiktív) metszéspontja az  $\omega_0$  Thomson-körfrekvenciánál van, ahol a függvényérték eltérése a fiktív metszésponttól pontosan  $-Q^{dB}$ , ugyanis

$$\Delta[H^{dB}(\omega_0)] = 20 \cdot \lg|\omega_0 \cdot \Delta\omega| - 40 \cdot \lg|\omega_0| = 20 \cdot \lg \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -Q^{dB}.$$

<sup>20</sup> Egy gyakori tévhit, hogy az irreducibilitás egyben rezonancia jelenséget hordoz magában.

<sup>21</sup> Az irreducibilitás feltétele:  $\Delta\omega < 2\omega_0$ .

<sup>22</sup> A *Thomson-frekvenciát* szokás *sarok*-, illetve *másodfokú zérus- és pólusfrekvenciának* is nevezni. A rezonanciafrekvencia mindig kisebb a Thomson-frekvenciánál, és csak a csillapítás nélküli határesetben ( $\alpha=0$ ) esnek pontosan egybe, amikor éppen a csillapítás nélküli fiktív  $\beta$  rezonanciafrekvenciával azonosak.

A rezgőköri terminológia megelőlegezése indokolható a soros RLC következő átviteli függvényével:

$$H(j\omega) = \frac{U_C}{U_{be}} = \frac{\frac{1}{Cj\omega}}{R + L \cdot j\omega + \frac{1}{Cj\omega}} = \frac{1}{LC \cdot (j\omega)^2 + RC \cdot j\omega + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L} \cdot j\omega + \frac{1}{LC}},$$

ami a Thomson-frekvencia és a sávszélesség fogalmával az alábbi alakot ölti:  $H(j\omega) = \frac{\frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L} \cdot j\omega + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + \Delta\omega \cdot j\omega + \omega_0^2}$ .

<sup>23</sup> A szakirodalmi feldolgozások a másodfokú tagok azon formáit preferálják, ahol a konstans tag 1, azaz:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0} \cdot j\omega + 1 = \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta \cdot j \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 1.$$

Az így definiált  $\zeta$  csillapítási együtthatóra e formai átírás alapján  $\zeta = \frac{1}{2} \Delta\omega / \omega_0 = 1 / (2Q)$ . Didaktikailag célszerűbb a meglévő  $\Delta\omega$  sávszélesség és  $Q$  jósági tényező újabb alkalmazásával elmélyíteni fogalmi tartalmakat, mintsem bevezetni a  $\zeta$  csillapítási együttható új fogalmát. [11] A  $\zeta$  elnevezése is következetlen, ugyanis a négypólusoknál a csillapítás az erősítés reciproka, itt viszont a  $\zeta$  csillapítási együttható ennek csak a fele, ugyanis a  $Q$  jósági tényező éppen az erősítést adja meg a Thomson-frekvencián.



Az 5. ábra néhány különböző  $Q$  jósági tényező esetén vázolja a másodfokú tag aszimptotikus közelítését, amelyekhez az alábbi észrevételek tehetők:

- a) A  $Q < -6$  dB, azaz  $\Delta\omega > 2\omega_0$  esetben két valós gyök ( $\alpha_1$  és  $\alpha_2$ ) van, ezért a szorzatalak:

$$\mathbf{H}(j\omega) = (j\omega - \alpha_1)(j\omega - \alpha_2) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2) - \omega^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot j\omega = \omega_0^2 - \omega^2 + \Delta\omega \cdot j\omega.$$

A kisebbik törésponti frekvenciánál ( $\omega_1 = -\alpha_1$ ) előbb  $20$  dB/dekád meredekséggel, majd a nagyobbiknál ( $\omega_2 = -\alpha_2$ ) még további  $20$  dB/dekád meredekséggel török felfelé a grafikon. Az  $\omega_0$  Thomson-frekvencia a két törésponti frekvencia mértani közepeként a fiktív sávközépnak, összegük pedig a fiktív sáv szélességnek feleltethető meg.<sup>24</sup>

- b) A  $Q = -6$  dB, azaz  $\Delta\omega = 2\omega_0$  az irreducibilitás határhelyzete, amikor konjugált komplex gyökpár helyett kétszeres valós gyök van ( $-\alpha = \omega_0$  és  $\beta = 0$ ), így a frekvencia átviteli függvény szorzatalakja  $\mathbf{H}(j\omega) = (j\omega + \omega_0)^2$ , azaz a grafikonja az  $\omega = \omega_0$  törésponti frekvenciánál  $+40$  dB/dekád meredekséggel török felfelé.

Az irreducibilitási tartományban a függvényt teljes négyzetté alakítással érdemes vizsgálni:

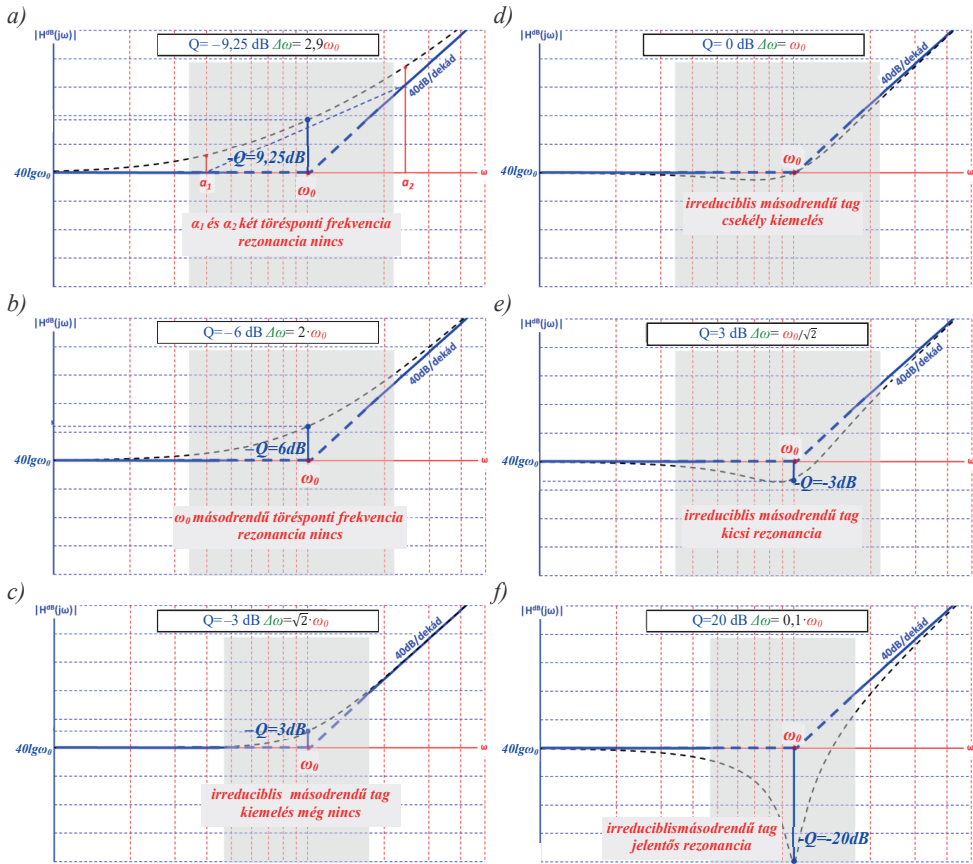
$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Delta\omega \cdot \omega)^2} = \sqrt{\left[\omega^2 - \left(\omega_0^2 - \frac{\Delta\omega^2}{2}\right)\right]^2 + \omega_0^4 - \left(\omega_0^2 - \frac{\Delta\omega^2}{2}\right)^2},$$

és célszerű bevezetni az  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Delta\omega^2}{2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  képlettel definiált, rezonanciafrekvenciá-

nak nevezett változót, amivel a függvény  $|\mathbf{H}(j\omega)| = \sqrt{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + \omega_0^4 - \omega_r^4}$  alakba írható.

- c) A  $-6$  dB  $< Q < -3$  dB, azaz  $\sqrt{2}\omega_0 < \Delta\omega < 2\omega_0$  irreducibilitási tartományon belül az  $\omega_r^2 < 0$  (azaz  $\omega_r$  komplex érték), így a  $|\mathbf{H}(j\omega)|$  függvény monoton nő, így nincs kiemelési jelenség. A rezonanciajelenség határhelyzete  $Q = -3$  dB,  $\Delta\omega = \sqrt{2}\omega_0$ ,  $\omega_r = 0$  értéknél következik be, ekkor simul legjobban az aszimptotikus közelítés a valódi görbéhez.

<sup>24</sup> Felhasználva a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} < 1/2$ , azaz  $Q < -6$  dB.

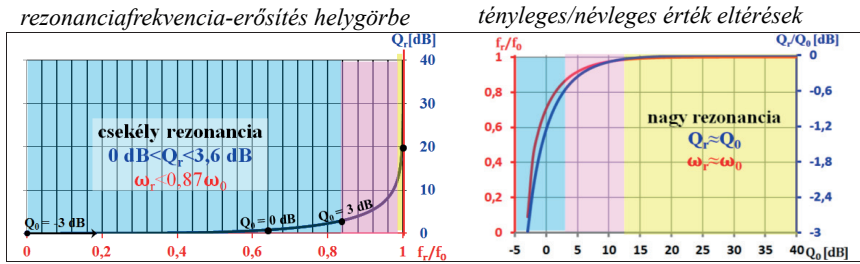


5. ábra – Példák másodfokú tag amplitúdó-jelleggörbéjének aszimptotikus közelítéseire

Ha  $Q > -3 \text{ dB}$  (azaz  $\Delta\omega = \sqrt{2}\omega_0$ ), akkor a  $|H(j\omega)|$  függvénynek már van minimuma. Érdekes külön jellemezni e rezonanciartományt 6. ábrán látható három szakaszát:

- d) A  $-3 \text{ dB} < Q < 3 \text{ dB}$ , azaz  $\omega_0 / \sqrt{2} < \Delta\omega < \sqrt{2}\omega_0$  esetén, a rezonanciartomány elején a kiemelés mértéke csekély, még a felső határnál sem éri el a  $-3,6 \text{ dB}$ -t. (A d) ábrán a  $Q=0 \text{ dB}$  eset szerepel, ahol  $\omega_r = \omega_0 / \sqrt{2}$ , és a tényleges kitüremkedés mértéke kisebb  $-2,5 \text{ dB}$ -nél.)
- e) A  $Q > 3 \text{ dB}$ -es közelítést meghaladó negatív irányú kiemeléshez  $\Delta\omega < \omega_0 / \sqrt{2}$  sáv-szélesség kell. A rezonanciafrekvencia mindig kisebb a Thomson-frekvenciánál, de a tényleges kiemelés mértéke a rezonanciafrekvencián is jó közelítéssel  $-Q^{\text{dB}}$  marad<sup>25</sup> (6. ábra).

<sup>25</sup> E közelítés pontosságát jellemzi, hogy  $H(j\omega_r)$  legfeljebb néhány tized decibellel kevesebb a  $H(j\omega_0)$  értéknél, ugyanis könnyen belátható, hogy  $H(\omega_r)/H(\omega_0) \approx \sqrt{\omega_r/\omega_0}$  a rezonanciartományban.

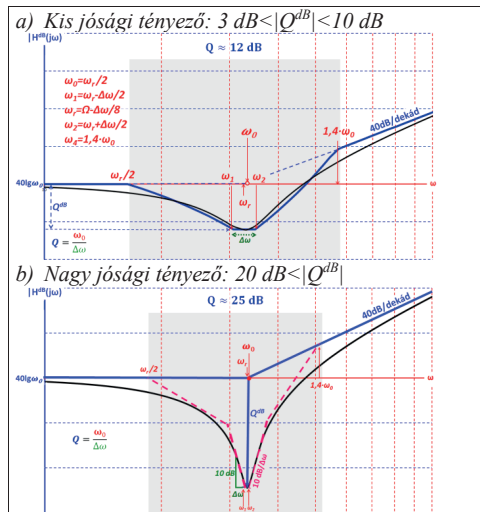


6. ábra – A rezonanciatartomány jellegzetes szakaszai a jósági tényező függvényében

f) Nagy jósági tényező ( $Q > 20 \text{ dB}$ ), – az 5/f ábrán például  $Q = 20 \text{ dB}$  és  $\Delta\omega = 0,1\omega_0$  esetén a rezonanciafrekvencia jól közelíthető az  $\omega_r = \omega_0 - \Delta\omega/8$  képlettel. A kitüremkedés szélességéről (a szokásos 3 dB-es közelítésen belül) megállapítható, hogy az  $\omega_r$  rezonanciafrekvencia körüli  $\pm\Delta\omega/2$  sávban a mélysége  $\sim Q^{\text{dB} \cdot 26}$

A kiemelési jelenséghez érdemes a következő két pontosító észrevételt tenni:

- a) Az aszimptotáktól történő kitüremkedés – a szokásos 3 dB-es közelítés mellett – az  $\omega_r/2$  frekvenciánál kezdődik és a  $\sqrt{2}\omega_0$  frekvencián be is fejeződik, azaz a kiemelés jelensége 0,8 dekádon belül játszódik le (7/a ábra).
- b) Egyes gyakorlati alkalmazásoknál (például a szelektív szűrőknél) fontosak a nagy jósági tényezőjű ( $Q > 20 \text{ dB}$ ) tagok, amelyeknél az  $\omega_r \pm \Delta\omega/2$  rezonanciasávban kilépve egy szűk környezetben a kitüremkedési effektus nagy változási sebességgel kezd eltűnni, de a konvergálása 3dB-es szinthez közeledve lelassul. A sávzélességből kilépve és  $\pm\Delta\omega$  lépést megtéve meglehetősen nagy



7. ábra – Másodfokú tag amplitúdó-jelleggörbéjének töréspontos közelítése a rezonanciafrekvenciánál

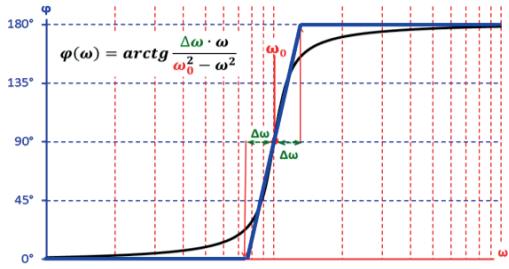
<sup>26</sup> A 3 dB-es töréspontra a  $\sqrt{2} = H(\omega_t)/H(\omega_0) = \sqrt{\frac{(\omega_t^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_t^2 \Delta\omega^2}{\omega_0^2 - \omega_t^2}}$  egyenletből a  $\Delta\omega \ll \omega_r$ , azaz  $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_r}\right)$  összefüggés felhasználásával közelítő megoldásként adódik:  $\omega_t = \sqrt{\omega_r^2 \pm \omega_r \Delta\omega} \approx \sqrt{\left(\omega_r \pm \frac{\Delta\omega}{2}\right)^2} = \omega_r \pm \frac{\Delta\omega}{2}$ .

(~10 dB/Δω) a kezdeti változási sebesség,<sup>27</sup> amit az előző lineáris közelítés elejrejt (7/b ábra).

Az irreducibilis másodfokú tag fázis-jelleggörbéje a következő függvény:

$$\varphi = \arctg \frac{\Delta\omega \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

E függvény egyszerűen vázolható, mivel a határértéke ω→0, illetve ω→∞ esetén rendre 0°, illetve 180°, és φ(ω<sub>0</sub>)=90°. A vízszintes aszimptotákat összekötő szakasz pedig átmegy az (ω<sub>0</sub>;90°) ponton és a meredeksége ~90°/sáv szélesség<sup>28</sup> (8. ábra).



8. ábra – Másodfokú tag fázis-jelleggörbéje és töréspontos közelítése

## Összetett Bode-diagramok

A több tényezőből álló, úgynevezett összetett tag Bode-diagramja vázolható az elemi tagok diagramjainak grafikus összegzésével, amihez érdemes két kiegészítő megjegyzést fűzni:

1. Az elemzést az összetett tag határértékének (ω→0 és ω→∞) meghatározásával célszerű kezdeni, ami áramkörileg a DC és a nagyfrekvenciás viselkedés megállapítását jelenti,<sup>29</sup> amit a törésponti és Thomson-frekvenciák meghatározása követ az okozott meredekségváltozással együtt. Így például a

$$H(j\omega) = \frac{2(j\omega)^2 + 500j\omega + 20000}{(j\omega)^2 + j\omega + 100} = 2 \cdot \frac{(j\omega + 50)(j\omega + 200)}{(j\omega)^2 + j\omega + 100}$$

<sup>27</sup> A  $H(\omega, \pm 1.5\Delta\omega) / H(\omega_0) = \sqrt{\frac{((\omega_0 \pm 1.5\Delta\omega)^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 - \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_0^2}} = \sqrt{\frac{(1.5\Delta\omega(2\omega_0 \pm 1.5\Delta\omega))^2}{\omega_0^2 - \Delta\omega^2}} + 1 \approx \sqrt{\frac{9\omega_0^2 \cdot \Delta\omega^2}{\omega_0^2 - \Delta\omega^2}} + 1 = \sqrt{10}$ , így a sávból kilépve a 3 dB-es

sávhatártól ±Δω lépésre már ~10 dB-re nő a változás! A gyakorlatban különféle mérőszámokkal jellemzik e változási sebességet, az úgynevezett szelektivitást. A sávközép-frekvencia jó közelítéssel a rezonanciafrekvencia és a Thomson frekvencia számtani közepe.

<sup>28</sup> Fodor [10] a Taylor-érintő számításával némileg nagyobb meredekséget ad, de nem nehéz belátni, hogy két sáv szélességen belül lezajlik az átállítás, hiszen  $\varphi(\omega, \pm \Delta\omega/2) \approx 90^\circ \mp 45^\circ$ .

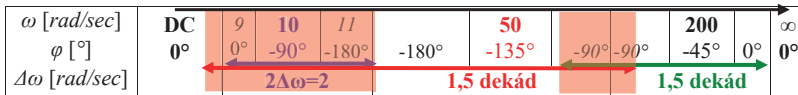
<sup>29</sup> A szakirodalomban szokásos a  $H(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i(j\omega)^i}{\sum_{k=0}^m a_k(j\omega)^k}$  alakból a konstans tagok hányadosának ( $b_0/a_0$ ) arányossági tényezőként történő kiemelése, ami éppen az ω→0 határértéket, azaz a DC-viselkedést írja le. Az itteni tárgyalásban a matematikában megszokott módon a legmagasabb fokú tagok hányadosa ( $b_n/a_m$ ) került kiemelésre, ami azonos fokszámú nevező és számláló esetén éppen az ω→∞, azaz a nagyfrekvenciás viselkedést írja le. A fenti kezdőlépés betartása feleslegessé teszi az állásfoglalást a két alternatíva között, ráadásul a fizikai kép alapján történő megállapítása egyben önellentőzést is jelent.

1. lépés:  $\lim_0 |H(j\omega)| = 200 = 46 \text{ dB}$   
 $\lim_\infty |H(j\omega)| = 2 = 6 \text{ dB}$

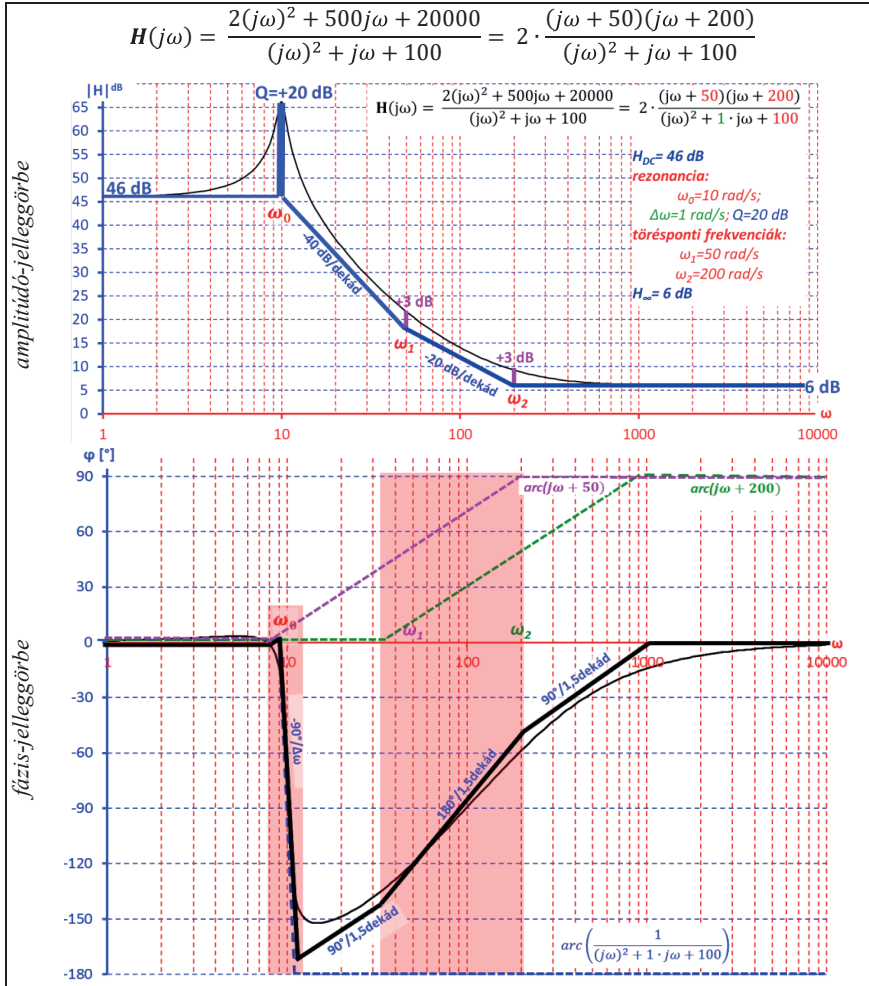
2. lépés meredekségváltozás:

Thomson-frekvencia:  $\omega_r = 10 \text{ [rad/sec]}$   $-40 \text{ [dB/dekád]}$   
 törésponti frekvenciák  $\omega_1 = 50 \text{ [rad/sec]}$   $+20 \text{ [dB/dekád]}$   
 $\omega_2 = 2000 \text{ [rad/sec]}$   $+20 \text{ [dB/dekád]}$

2. Az egyes elemi tagok Bode-diagramjának grafikus összegzése relatíve mindaddig egyszerűen végezhető, amíg a törésponti és rezonanciafrekvenciák egymáshoz képest úgy helyezkednek el, hogy az egyes tagok aszimptotikus közelítése már érvényesüljön, mielőtt a másik tag okozta változás hatni kezdene. A lineáris tagok fázismeneténél például a két aszimptotikus közelítés közti átmenet ~1,5 dekádon át tart, így közeli frekvenciák esetén gyakorta előfordulhat, hogy a két átmenet együttes változását kell közelíteni. Az előző frekvencia átviteli függvényénél ezen átfedések érzékeltethetők az alábbi módon:



9. ábra – A transzfer karakterisztika töréspontos ábrázolása



10. ábra – Összetett tag Bode-diagramjának töréspontos közelítése

## Didaktikai megjegyzések

A transzfer karakterisztika az egyik alapeszköze a dinamikus rendszerek viselkedésének leírásának. A bevezetőben szerepeltetett absztrakt matematikai modell nélkül is belátható, hogy a kimeneti és bemeneti mennyiség közti kapcsolat  $j\omega$  racionális törtfüggvénye,<sup>30</sup>

<sup>30</sup> A villamos hálózatok lineáris alaptörvényei (Ohm- és Kirchhoff-törvények) és az impedanciák  $j\omega$  racionális törtfüggvényei ezt garantálják. A 2. ábra vezérelt generátorának a feszültségerősítése sokszor elemi úton felírható például a feszültségosztó képlettel.

így e módszer relatíve kevés előtanulmányt igényel, az ismerethálóba történő érdemi beépítésének a középiskolai követelményeken túlmutató alapfeltételei a következők:

- matematikai előismeretként a komplex számok elemi algebraja mellett elsősorban a határérték és aszimptotikus közelítés fogalmára van szükség;
- elektrotechnikai szempontból a szinuszos hálózatok komplex számokkal történő számítási eljárásának készségszintű elsajátítására, valamint a (soros, párhuzamos) rezgőkörök klasszikus elméletének ismeretére épít e tárgyalás.

E módszer főbb előnyei a következők:

- alkalmazása elmélyíti a határérték és aszimptota fogalmi tartalmát,
- a logaritmikus lépték használata más aspektusból is rávilágít a logaritmus hasznosságára,
- egzakt eszközt biztosít az áramkörök funkcionális csoportosításához és jellemzéséhez,
- a rezgőkörök klasszikus elméletének eredményeit egyértelműsíti, pontosítja,<sup>31</sup>
- előkészíti a további elemzéseket, így a spektrum- és tranziens-analízis témakört.

E cikk áramkör-orientált megközelítésben ugyan, de határozottan matematikai aspektusból vizsgálta a transzfer karakterisztika fogalmát, így számos műszaki szempontból fontos kérdésre nem tért ki. Az oktatási folyamatban persze ezen elméleti ismereteknek szerves módon ki kell egészülniük konkrét áramkörök transzfer karakterisztikájának elméleti meghatározásával és mérési módszereivel, valamint azon inverz feladattal, hogy adott transzfer karakterisztikákat milyen eljárással lehet áramkörileg realizálni.

## Irodalomjegyzék

- [1] Shannon, Claude E.: A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, Vol. 27., 1948, 379–423, 623–656.
- [2] Nyquist, Harry: Certain topics in telegraph transmission theory. *Trans. AIEE*, Vol. 47., 1928, 617–644. Reprint as classic paper, In *Proc. IEEE*, Vol. 90, No. 2, Feb 2002.
- [3] Nyquist, Harry: Regeneration theory. *Bell System Technical Journal*, Vol. 11., 1932, 126–147. [translate.googleusercontent.com/translate\\_c?depth=1&hl=hu&prev=search&rurl=translate.google.hu&sl=en&sp=nmt4&u=https://archive.org/stream/bstj11-1-126%3Fui%3-Dembed&usg=ALkJrhhvRD-mwuJD0spuVm-1OWkgdw\\_AZiQ#page/n0/mode/2up](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=hu&prev=search&rurl=translate.google.hu&sl=en&sp=nmt4&u=https://archive.org/stream/bstj11-1-126%3Fui%3-Dembed&usg=ALkJrhhvRD-mwuJD0spuVm-1OWkgdw_AZiQ#page/n0/mode/2up) (a letöltés ideje: 2017. 12. 21.)
- [4] Hartley, Ralph V. L.: Transmission of Information. *Bell System Technical Journal*, Vol. 7., 1928, 535–563.
- [5] Norton, Edward Lawry: Constant resistance networks with applications to filter groups. *Bell System Technical Journal*, Vol. 16, 1937, 178–193. [archive.org/stream/bstj16-2-178#page/n0/mode/2up](https://archive.org/stream/bstj16-2-178#page/n0/mode/2up) (a letöltés ideje: 2017. 12. 21.)
- [6] Bode, Hendrik Wade: Variable Equalizers. *Bell System Technical Journal*, Vol. 17., 1938, 229–244. [onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/j.1538-7305.1938.tb00429.x/abstract](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/j.1538-7305.1938.tb00429.x/abstract) (a letöltés ideje: 2017. 12. 21.)

<sup>31</sup> A rezgőkörök klasszikus elmélete az eredő impedancia szélsőértéke alapján vezeti be a Thomson-frekvenciát, ami többnyire hamis módon rezonanciafrekvenciaként tudatosul.

- [7] Márton László Ferenc F.: *Jelek és rendszerek*. Scientia Kiadó, Kolozsvár, 2007. primeranks.net/yeti/University/II%20ev/II%20felev/Rendszerlemezlet%20I/Jelek%20es%20Rendszerek%20-%20Marton%20Laszlo%20-%20Konvy.pdf (a letöltés ideje: 2017. 12. 21.)
- [8] Heaviside, Oliver: *Electrical Papers I-II*. Macmillan Co., London-New York. *Electrical papers I-II*. Macmillan and Co., New York–London, 1892–1894.
- [9] Fodor György: Az átviteli karakterisztika értelmezéséről. *Híradástechnika*, 57. évf. 4. szám, 2002, 15–21.
- [10] Fodor György: *Elméleti elektrotechnika II*. Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1970, 213–217., 233. www.omikk.bme.hu:8080/cikkadat/bitstream/123456789/462/1/2002\_4bol4.pdf (a letöltés ideje: 2017. 12. 21.)
- [11] Fatalin László: *Hierarchikus fogalmi struktúrák vizsgálata gráfokkal*. Debreceni Egyetem, 2008. dea.lib.unideb.hu/dea/bitstream/handle/2437/85019/ertekezes\_magyar.pdf?sequence=4 (a letöltés ideje: 2017. 12. 21.)
- [12] Turóczy Antal: *Irányítástechnika I-II*. users.nik.uni-obuda.hu/vill/Irtech\_I/Eloadas/Iranyitas-technika\_II.pdf (a letöltés ideje: 2017. 12. 21.)
- [13] Nyquist, H.: Certain factors affecting telegraph speed. *Bell System Technical Journal*, Vol. 3., 1924, 324–346.
- [14] Ziegler, J.G – Nichols, N. B.: *Optimum settings for automatic controllers*. *Transactions of the ASME*. Vol. 64, 1942, 759–768.
- [15] James, H. M. – Nichols, N. B. – Phillips, R. S.: *Theory of Servomechanism*. McGraw-Hill Book Co., New York–Toronto–London, 1947, www.introni.it/pdf/25%20-%20Theory%20of%20Servomechanisms.pdf (a letöltés ideje: 2017. 12. 21.)
- [16] Bode, H. W.: *Hálózatok és visszacsatolt erősítők tervezése*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1961.
- [17] Lantos B.: *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I. Egyváltozós szabályozások*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2005.
- [18] Szilágyi Béla: *Szabályozástechnika. Az állapot-egyenlet megoldása, stabilitás. Szervóhajtás szabályozási rendszerének állapotegyenlete, átviteli függvényei és stabilitása (integrál szabályozás). A frekvencia függvény*. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki és Informatikai Kar, Irányítástechnika és Informatika Tanszék, 2008. sirkan.iit.bme.hu/~szbela/ (a letöltés ideje: 2017. 12. 21.)
- [19] Magyar A.: *Irányítástechnika és technika I*. Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Kar Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék, Veszprém, 2010.
- [20] Bokor József: *Irányítástechnika gyakorlatok. Alapfogalmak Nyquist- és Bode-diagramjai*. Typotex Kiadó, Budapest, 2013.
- [21] Fatalin László: A lineáris hálózatok számítási eljárásairól. *Bolyai Szemle* 25. évf. 4. szám, 2016, 58–70. archiv.uni-nke.hu/uploads/media\_items/bolyai-szemle-2016-04.original.pdf (a letöltés ideje: 2017. 12. 21.)

## Transfer Characteristics of the Linear Systems

FATALIN LÁSZLÓ – HODÁNY ÁKOS

The analysis of the frequency dependency of networks played an important role in research already in the early decades of the 20th century, driven mainly by the development of communication systems. The speed of information transmission is still in the focus of research activities today, but these are mostly dominated by the issues of digital signal transmission instead of those of the analogue signal chains. The classic descriptions of the frequency-dependent behaviour of linear systems are mathematically well-founded, but their didactic elaboration is questionable. After recalling some historical background of this topic, this article presents a circuit-oriented analysis with didactic benefits, enabling a re-interpretation of the Bode diagrams and a more precise partitioning of the frequency dependent blocks of various linear systems.

**Keywords:** transfer characteristics, Nyquist plot, Bode plot, pole-zero plot, irreducible, resonance, quality factor, bandwidth