Fatalin László

Szimmetrikus hálózatok számítási eljárásairól

„…a legszörnyűbb ajándék, mellyel egy ellenséges géniusz lepte meg korunkat: ismeretek készségek nélkül." (Pestalozzi)

Ez a cikk a platóni testek szimmetriáin keresztül mutatja be a szimmetrikus hálózatok specifikus számítási eljárásait. A klasszikus csomópont fogalmi általánosításának, az ekvipotenciális pontok fogalmának van különös jelentősége ezekben a számításokban. Ezek az alkalmazások a csomópont fogalmi tartalmát mélyítik el. Az áramkörök megépítése jó forrasztási gyakorlat, és az eredménye lehetőséget nyújt a szimmetrikus felbontás elvének elméleti és gyakorlati tanulmányozására.
Kulcsszavak: szimmetrikus hálózatok, szabályos testek, szimmetrikus felbontás elve

A szimmetriák és szimmetriaelvek felismerése segítheti egy-egy jelenségkör megértését, illetve egy fogalom tartalmi elmélyítését. A villamos és mágneses terek tárgyalásakor – talán bonyolultságuk miatt – már kezdettől a szimmetrikus elrendezések vizsgálatára kerül sor, így a pontszerű töltés villamos terének gömbszimmetriája csakúgy kiindulási pontként szolgál, mint az árammal átjárt egyenes vezető mágneses terének hengerszimmetriája. A villamos hálózatok esetében a szakirodalom mellőzi a szimmetriákat, amelyek csak elvétve fordulnak elő érdekes feladatként. A számítógépes modellek elterjedése ma már indokolhatja e mellőzöttséget, de a lineáris hálózatok általános számítási metódusainak áttekintése [9] mellett érdemes megnézni, hogy a hálózati szimmetriák milyen további egyszerűsítési lehetőségek és újabb módszerek előtt nyitnak utat. Ez a cikk e lehetőségeket vizsgálja egy klasszikusnak számító feladat megoldásain keresztül. E feladat egy verzióját tette közzé *Niedermayer Ferenc* a *Kömal* 1988. januári számában:

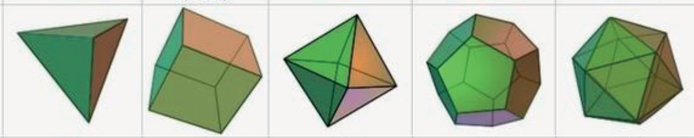
„Egy kocka minden éle r ellenállású. Mekkora az eredő ellenállás két szomszédos csúcs között? Oldjuk meg a feladatot a többi szabályos poliéder alakú ellenállás-hálózatra is!"

A feladat megoldásánál nem szorítkozunk a szomszédos csúcsok közti eredő meghatározására, mert a szabályos poliéderek változatos szimmetriái ennél sokkal gazdagabbak.

Szimmetria és szabályos testek

A szimmetria fogalma köznapi értelmezésben sokszor tükörképszerű elrendezésre redukálódik. A szimmetria szó latin–német közvetítéssel honosodott meg a magyar nyelvben a görög *szümmetria (helyes arány)* kifejezés nyomán.[1] A szimmetria szakirodalma igen széleskörű mind interdiszciplináris fogalmát, mind megjelenési formáit tekintve, amiről már *Hermann Weyl* 1952-es *Symmetry* című könyve is szép áttekintést adott. E vizsgálatok napjainkban is tartó töretlen fejlődését mutatja, hogy 2016 júliusában a *Technische Universität Wien* rendezésében tartották meg a *Symmetry Festival 2016*-ot.[2]

A geometriai szimmetriákra, így a középpontos, a tengelyes és a síkra vonatkozó tükrözések mellett a forgásszimmetriákra is változatos példákat nyújt az öt tökéletesen szabályos poliéder, melyeket platóni testeknek is neveznek. (Utóbbi elnevezésüket az indokolja, hogy *Platón* a tökéletesség ideájának hódolva szerepeltette ezeket *Timaiosz* című dialógusában.) Az öt tökéletes poliédert tünteti fel néhány adatával együtt az 1. ábra. A tetraédert, a kockát és a dodekaédert már *Püthagorasz* előtt is ismerték, míg az oktaédert és az ikozaédert valószínűleg *Theaitetosz* (~i. e. 417–369) fedezte fel.[3]

Név	Tetraéder	Hexaéder (Kocka)	Oktaéder	Dodekaéder	Ikozaéder
Kép					
Oldallapok száma (l)	**4**	**6**	**8**	**12**	**20**
Oldallapok fajtája	szabályos háromszög	négyzet	szabályos háromszög	szabályos ötszög	szabályos háromszög
Élek száma ($é$)	6	12	12	30	30
Csúcsok száma (c)	4	8	6	20	12
Egy csúcsból induló élek száma	3	3	4	3	5
Testátlók száma	0	4	3	100	36
Lapszög	$\approx 70°31'43,61''$	$90°$	$\approx 109°28'16,39''$	$\approx 116°33'55,84''$	$\approx 138°11'22,87''$
Felület az él (a) függvényében	$a^2\sqrt{3}$	$6a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$5a^2\sqrt{3}$
Térfogat az él (a) függvényében	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	a^3	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a^3(15+5\sqrt{5})}{12}$
Körülírt gömb sugara az él (a) függvényében	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\sqrt{3}\frac{1+\sqrt{5}}{4}a$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Beírt gömb sugara az él (a) függvényében	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}a$	$\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}a$

1. ábra. Az öt platóni test és néhány adatuk [10]

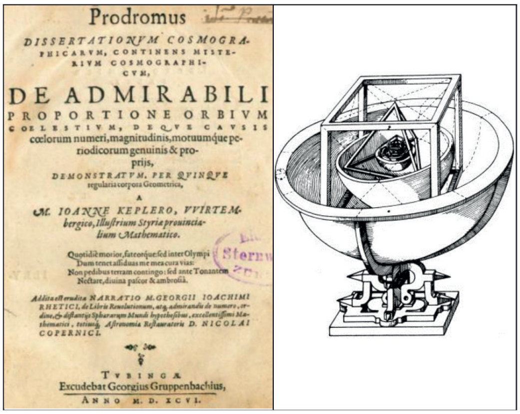
[1] A nyelvészek etimológiailag a görög *szün- (együtt)* és *metros (mér)* elem összetételre vezetik vissza.
[2] Budapest 2009-ben adott helyet e fesztiválnak.
[3] Egyes források szerint már Babilonban is ismerték az ikozaédert.

szabályos test		őselem	szimbóluma	égtáj	évszak
1.	tetraéder	tűz	Δ	dél	nyár
2.	ikozaéder	víz	⊖	nyugat	ősz
3.	kocka	föld	⊕	észak	tél
4.	oktaéder	levegő	⊙	kelet	tavasz
5.	dodekaéder	Empedoklész egyesítette a négy őselemtant, ami kiegészült az égi világot képviselő 5. elemmel a quinta essentiával			

2. ábra. A szabályos testek szerepe a platóni világban

E tökéletes testek szerepet kaptak a világ szerkezetének magyarázatában is. *Platón* a természeti és égi világ 4 + 1 alapeleméhez az öt szabályos testet kapcsolta matematikai formaként, amit a 2. ábra mutat be.

Kepler is az öt platóni testet társította az akkor ismert öt bolygóhoz, és e szavakkal ismertette prekoncepciós elméletét pályájukról:[4] *„Mindenek mértéke a Föld szférája. Rajzolj köréje egy dodekaédert: a köréje írt szféra lesz a Marsé. Rajzolj most egy tetraédert a Mars szférája körül: ezen tetraéder köré írt szféra lesz a Jupiteré. Írj egy kockát a Jupiter szférája köré: ezen kocka köré írt szféra a Szaturnuszhoz tartozik. És most rajzolj a Föld szférájának belsejébe egy ikozaédert: az ebbe írt szféra a Vénuszé. Rajzolj egy oktaédert a Vénusz szférájába: az ebbe berajzolt szféra lesz a Merkúr szférája. Íme, ez a magyarázata a bolygók számának."*



3. ábra. Kepler: Mysterium Cosmographicum

[4] Kepler *Mysterium Cosmographicum* (1596) könyve sikeres volt, így 1621-ben megjelent a második kiadása is. A 3. ábrán látható térbeli ábrázolás *Christophorus Leibfried* (1597) műve.

Kepler a Mars mozgását vizsgálta *Brahe* megbízásából, és a dodekaéder-Mars esetén a valódi és elméleti érték jelentős eltérését tapasztalta, így sikert hozó elméletét elvetve alkotta meg nevezetessé vált törvényeit.

Ekvipotenciális pontok

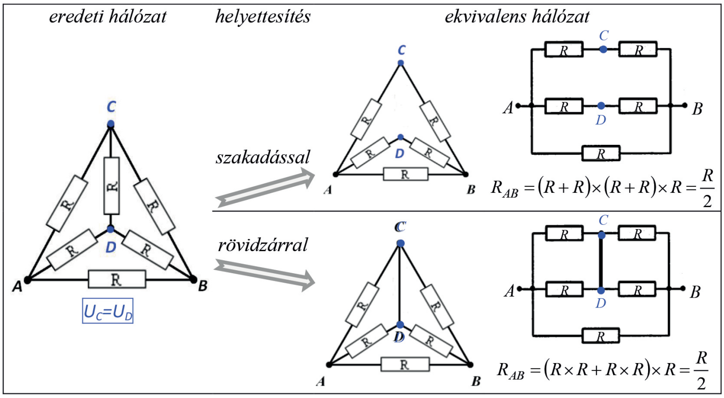
A szimmetrikus hálózatok vizsgálatának legfőbb didaktikai jelentősége, hogy tudatosan előtérbe helyezi az ekvipotenciális pontok fogalmát, ami a csomópont klasszikus fogalmának funkcionális általánosítása, így elősegíti a csomópontok felismerését és használatát, azaz a csomópont fogalmi tartalmát mélyíti el.

Az azonos potenciálú pontokat nevezzük ekvipotenciálisaknak,[5] azaz közöttük nincs feszültség, így fontos észrevétel, hogy ha egy áramkörben az *A* és *B* pont ekvipotenciális, akkor

- az *A* és *B* ekvipotenciális pontok (ideális) vezetékkel, azaz rövidzárral összeköthetők, hiszen ezen az ágon áram úgysem folyik, így az áramkör eredő ellenállása sem változik meg, aminek eredményeként több csomópont egybevonható;
- az *A* és *B* ekvipotenciális pontokat közvetlenül összekötő ágak törölhetők, azaz szakadással helyettesíthetők, mert áram úgysem folyik ezeken, így e művelet nem változtatja meg az áramkör eredő ellenállását, ami által a hurkok száma csökkenthető.

A szimmetrikus felépítésű áramkörökben jó eséllyel találhatók ekvipotenciális pontok, melyek feltárása az előző megállapítás értelmében kétféle egyszerűsítést is lehetővé tesz a hálózat ekvivalens átalakításakor. A 4. ábrán egy olyan tetraéder látható, melynek élei hat darab egyforma *R* ellenállásból készültek. Az *AB* pontok közti eredő ellenállás meghatározásához szimmetriai okok alapján megállapítható, hogy a *C* és *D* pontok ekvipotenciálisak, így az R_{AB} eredő ellenállás nem változik meg, ha a *C* és *D* pontokat rövidzárral kötjük össze, avagy a *C* és *D* pontok közti ellenállást töröljük, azaz szakadással helyettesítjük. Mindkét megoldás nyomon követhető a 4. ábrán.

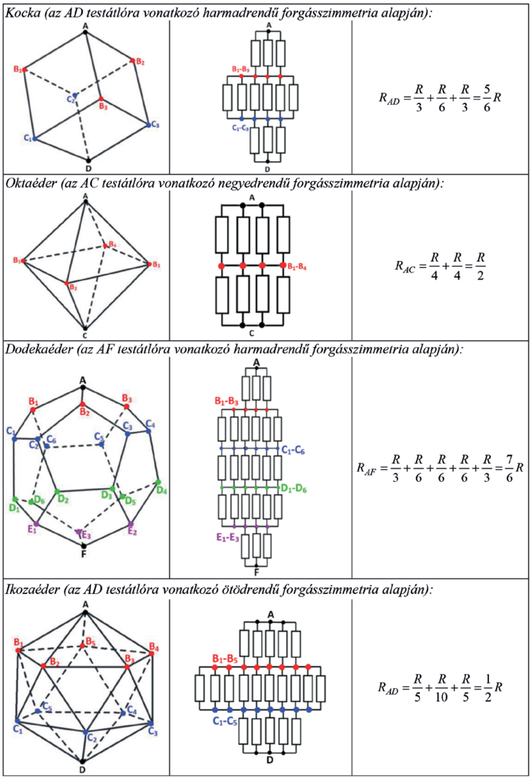
[5] Az *ekvipotenciális* kifejezést etimológiailag a latin *aequus (egyenlő)* és *potentia (képesség)* szavakra vezetik vissza.



4. ábra. Egy ellenállás-hálózat két átalakítása ekvipotenciális pontjainak segítségével

A szabályos testek eredő ellenállása a testátlóra

Először a szabályos testek testátlóira vonatkozó forgásszimmetria alapján határozzuk meg az az azonos értékű ellenállásokból álló élvázon a testátló két végpontja közti eredő ellenállást. Mivel a tetraédernek nincsenek szemközti csúcsai, ezért csak a többi négy szabályos testnél értelmezhető a testátlóra vonatkozó ellenállás, melynek meghatározása az 5. ábrán követhető nyomon. Az egyes testeknél a forgásszimmetria alapján megállapíthatók az (azonos színnel jelölt) ekvipotenciális pontok, melyek segítségével a csomópontok összevonhatók, ami által egyszerűsödik a hálózat gráfja. (A soros és párhuzamos eredők segítségével a számítások egyszerűen elvégezhetők.)

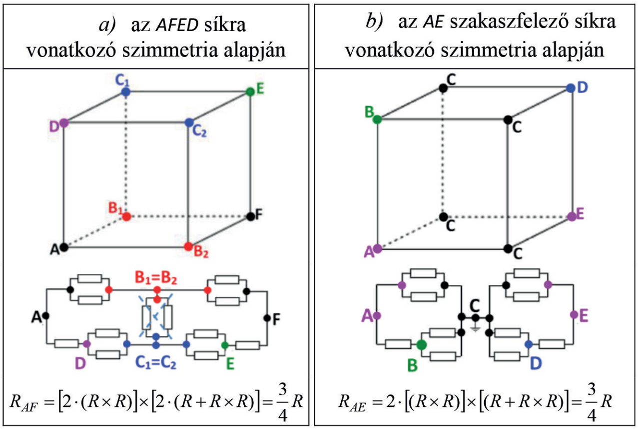


5. ábra. Testátlóra vonatkozó eredő ellenállás: ekvipotenciális pontok a forgásszimmetria alapján

A szabályos testek eredő ellenállása a lapátlóra

Lapátló csak a kocka esetén értelmezhető, hiszen a háromszögeknek, illetve ötszögeknek nincs átlója. Az előző kockaélváz lapátlóra vonatkozó eredő ellenállásának meghatározásakor kétfajta szimmetria felhasználása is tanulmányozható a 6. ábrán:

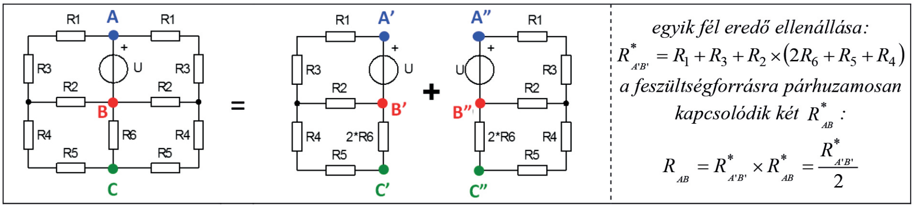
- A 6. *a)* ábrán az *AFED* síkra vonatkozó szimmetriát felhasználva megállapítható a B_1–B_2 és a C_1–C_2 pontok azonos potenciálja, így a $B_1 \equiv B_2$ és a $C_1 \equiv C_2$ csomópontok azonosíthatók. A megrajzolt ekvivalens hálózat hídágában sem folyik áram, így az is törölhető!
- A 6. *b)* ábrán az *AE* szakaszfelező síkkal a kocka két szimmetrikus részre bontható. E felezősík *C* pontjainak a potenciálja éppen az *A* és *E* pontok potenciáljának a számtani közepe, azaz az *AE* pontokra szimmetrikus $\pm U_t$ tápfeszültséget kapcsolva e sík *C* pontjai földpotenciálúak, azaz ekvipotenciálisak. E felbontás nyomán két sorba kötött egyforma áramkör eredőjeként adódik a megoldás. Az ekvivalens hálózat egyszerűen rajzolható.



6. ábra. A lapátlóra vonatkozó tükrözési szimmetria kétféle felhasználása

A 6. *b)* ábra megoldása ráirányítja a figyelmet arra, hogy egy (tükör)szimmetrikus áramkör felbontható két egyforma áramkörre, ezért elég az áramkör felére elvégezni a számításokat. A szimmetrikus felbontási módszer a 7. ábrán tanulmányozható:

- Az *AB* szimmetriatengelyen fekvő elemeket úgy kell megkettőzni, hogy a „félaramkörben" a feszültséggenerátor változatlan értékű marad, az ellenállások kétszeres értékűek, az áramgenerátorok pedig fele értékűek legyenek!
- A szimmetriatengelyen kívül levő áramköri elemek feszültsége és árama közvetlenül a „féláramkör" alapján számítható. Az *AB* szimmetriatengely pontjai közti feszültségek mindkét oldalon megegyeznek az „eredő" feszültséggel, míg a kétoldali áramértékek összeadódnak, azaz duplázni kell!

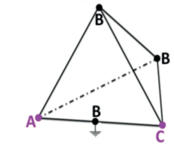


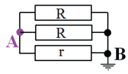
7. ábra. Szimmetrikus áramkör felbontása

A szabályos testek eredő ellenállása a szomszédos csúcsokra

A 8. ábra a szabályos testek szomszédos csúcsai közti eredő ellenállás meghatározását mutatja be a szimmetrikus felbontás módszerével. A felbontás az adott él szakaszfelező merőleges síkjával történik, aminek pontjai földpontnak tekinthetők, ha az élre szimmetrikus $\pm Ut$ tápfeszültséget kapcsolunk. Néhány esetben e szimmetriasík tartalmaz éleket, de az ilyen élek ellenállásai helyettesíthetők rövidzárral, hiszen e sík pontjai ekvipotenciálisak!

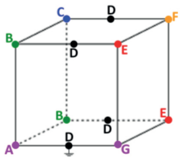
Tetraéder (AC szomszédos csúcsokra vonatkozó eredő ellenállása):

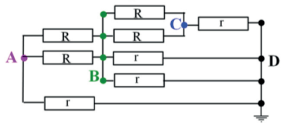




$$R_{AB} = R \times R \times r = \frac{1}{4} R;\quad R_{AC} = 2 \cdot R_{AB} = \frac{1}{2} R$$

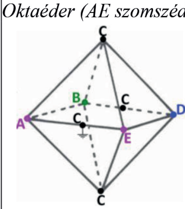
Kocka (AG szomszédos csúcsokra vonatkozó eredő ellenállása):

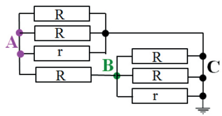




$$R_{AD} = r \times [R \times R + (R \times R + r) \times r \times r] = \frac{7}{24} R;\quad R_{AG} = 2 \cdot R_{AD} = \frac{7}{12} R$$

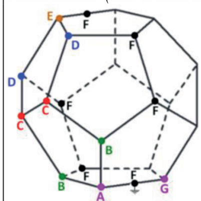
Oktaéder (AE szomszédos csúcsokra vonatkozó eredő ellenállása):

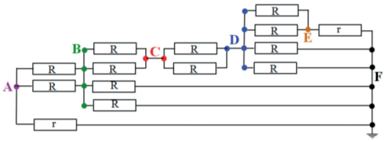




$$R_{AC} = [(R + R \times R \times r) \times R \times R \times r] = \frac{5}{24} R;\quad R_{AE} = 2 \cdot R_{AC} = \frac{5}{12} R$$

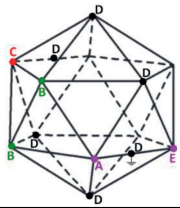
Dodekaéder (AG szomszédos csúcsokra vonatkozó eredő ellenállása):

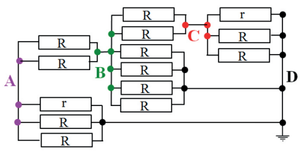




$$R_{AF} = \{[(r + R \times R) \times R \times R + R \times R + R \times R] \times R \times R + R \times R\} \times r = \frac{19}{60} R;\quad R_{AG} = 2 \cdot R_{AF} = \frac{19}{30} R$$

Ikozaéder (AD szomszédos csúcsokra vonatkozó eredő ellenállása):



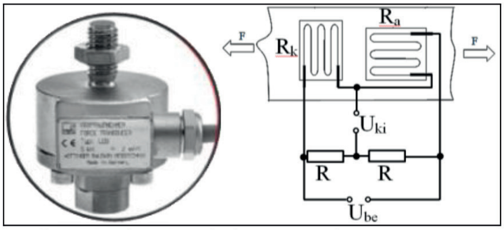


$$R_{AD} = R \times R \times r \times [R \times R + R \times R \times R \times R \times (R \times R + R \times R \times r)] = \frac{11}{60} R;\quad R_{AE} = 2 \cdot R_{AD} = \frac{11}{30} R$$

8. ábra. Szomszédos csúcsok közti eredő ellenállás a szimmetrikus felbontás alapján

Megjegyzések

Az előző feladatmegoldások[6] jó példák arra, hogy az ekvipotenciális pontok segítségével miként mélyíthető el a csomópont fogalma, melyek biztos felismerése nélkülözhetetlen a számításokban. A tárgyalt hálózatok igen kevés anyagigénnyel meg is építhetők. E térbeli feladatok realizálása igen jól szolgálja a forrasztási készség fejlesztését, aminek eredményeként az elkészült modelleken keresztül a gyakorlatban is ellenőrizhetővé válnak az elméleti ismeretek, így méréssel megkereshetők például az ekvipotenciális pontok, azok vezetékkel rövidre is zárhatók. (E feladatkör változatosabbá válik a tökéletes platóni testeknél sok szempontból érdekesebb *félig szabályos testek* alkalmazásával, melyeket *arkhimédészi testeknek* is neveznek, mivel ő tárgyalta ezeket részletesen egy elveszett munkájában.[7])



9. ábra. Nyúlásmérő bélyegre épülő erőszenzor

Az elmúlt évszázadban a tökéletes szimmetriák mellett egyre nagyobb teret kapott a szimmetriasértések vizsgálata. Ma már sokan a szimmetria apró sérüléseivel, az ún. disszimmetriákkal kívánják leírni a fejlődés mozgatóerőit is. Darvas György (2009) megállapítja, hogy *„az állandóság és a változás szintézise a szimmetriafogalom általánosításából következik."*

Sok technikai eszköz működése is kisebb disszimmetrián alapul. A különböző szenzorokban például elterjedten alkalmazzák a 80 éve feltalált nyúlásmérő bélyegeket. A 9. ábrán látható egyszerű hídkapcsolásban az aktív *Ra* és a hőmérséklet-kompenzáló *Rk* nyúlásmérő bélyegek biztosítják az áramkör hőmérséklettől független szimmetriáját, így a hídág két vége mindaddig ekvipotenciális, amíg az erő hatására az aktív bélyeg ellenállás-változása *(ΔRa)* meg nem bontja a híd szimmetriáját. (Ilyenkor a híd kimeneti feszültsége közel arányos a *ΔRa*/*Ra* értékkel.)

A szimmetrikus felbontás elve is megjelenik a hálózatszámítások különböző területein. Az aszimmetrikus háromfázisú rendszerekben az ún. Fortescue-tétel alapján alkalmazzák az ún. szimmetrikus tényezőkre bontást, míg a differenciálerősítőknél a vezérlőjelet egy szimmetrikus és egy közösmodusú jel összegére bontják fel. E módszerekkel

[6] Az élre vonatkozó eredő meghatározására más megoldási módszereket mutat be. [11]

[7] 1619-ben *Kepler* ismét tárgyalta őket a prizmákkal együtt, és teljessé tette az ilyen testek körét. Számuk 13.

nagymértékben egyszerűsödnek a számítások, és egyben átláthatóbbá is válik a rendszer viselkedése. Mindezek alapján didaktikai szempontból indokoltnak tűnik, hogy már az egyszerű hálózatszámításoknál is teret kapjanak a szimmetrikus esetek vizsgálatai.

Irodalomjegyzék

[1] Platón (~ i. e. 430): *Timaiosz.* http://kutrov.web.elte.hu/courses/csilltortszoveg/01_platon.pdf

[2] Kepler, Johannes: *Mysterium Cosmographicum.* Tübingen, 1596. https://books.google.hu/books?id=gKJWDgAAQBAJ&pg=PA30&lpg=PA30&dq=kepler+mysterium+cosmographicum+1596&source=bl&ots=fJepVfB4jA&sig=flCkx0lUU7pBDRr0-4_Zrs_6pmA&hl=hu&sa=X&ved=0ahUKEwjzgf7FxOnSAhVGDJoKHVTzBmMQ6AEIbTAP#v=onepage&q=kepler%20mysterium%20cosmographicum%201596&f=false

[3] Kepler, Johannes: *Harmonice Mundi.* Linz, 1619.

[4] Pestalozzi, Johann Heinrich: *Wie Gertrud ihre Kinder lehrt?* Bern u. Zürich, Heinrich Gessner, 1801. http://gutenberg.spiegel.de/buch/wie-gertrud-ihre-kinder-lehrt-504/1

[5] Weyl, Hermann Klaus Hugo: *Symmetry*. Princeton University Press, 1952. (magyarul: *Szimmetria,* Gondolat, 1952) https://archive.org/details/Symmetry_482

[6] Millman, Jacob – Halkias, Christos C.: *Electronic Devices & Circuits.* McGraw-Hill, 1967. https://archive.org/details/ElectronicDevicesCircuits

[7] Bérczi Szaniszló: A szabályos és féligszabályos (platoni és archimedészi) testek és mozaikok periódusos rendszere. *Középiskolai Matematikai Lapok,* 59. évf. 5. szám, 1979, 193–199.

[8] Darvas György: Állandóság és változás szintézise – Szimmetria a tudományban és a művészetben. *Madi Art Periodical,* No. 5, 2009. http://mobilemadimuseum.org/?page_id=957 (a letöltés időpontja: 2017. 02. 26.)

[9] Fatalin László: A lineáris hálózatok számítási eljárásairól. *Bolyai Szemle,* 25. évf. 4. szám, 2016, 58–70. http://uni-nke.hu/uploads/media_items/bolyai-szemle-2016-04.original.pdf

[10] http://vilagbiztonsag.hu/keptar/displayimage.php?album=582&pid=15221#top_display_media (a letöltés időpontja: 2017. 02. 26.)

[11] http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=FelHivatkoz&id=39900 (a letöltés időpontja: 2017. 02. 26.

On the Calculation Methods of Symmetrical Networks

FATALIN LÁSZLÓ

This article describes the typical calculation methods of the symmetric networks through symmetries of the platonic solids. The concept of equipotential points, which is a generalization of the concept of the classic node has a significant role in these calculations. These applications will deepen the content of the concept of the node. The workmanship of these circuits can be a good soldering practice and the results allow a theoretical and practical study of the principle of symmetric resolution.

Keywords: symmetrical networks, platonic solids, principle of symmetrical resolution