VII. A hálózatelemzés alapfogalmai – gráfok, centralitás, szomszédosság, hidak és a kis világ

Molnár László

DOI: 10.36250/00734.07

1. A fejezet célkitűzése

A fejezet célkitűzése, hogy megismertesse az Olvasót a hálózatkutatás alapfogalmaival és összefüggéseivel. A rendszerelmélet fontos részét képezi ez a fejezet, hiszen a rendszerek modellezhetők gráfokkal, hálózatokat alkotnak önmagukban is, más rendszerekbe átnyúlva, vagy akár saját magukon belül is találunk hálózatokat.

A fejezet tartalmilag némi egyszerűbb matematikai ismeretet is át kíván adni, mivel a hálózattudomány alapjául szolgáló gráfelmélet bemutatása anélkül nem igazán elképzelhető. Ezeket azonban igyekeztünk példákon keresztül illusztrálni az érthetőséget és a befogadhatóságot célul tűzve zászlónkra. A fejezet a későbbi hálózattudományi és gráfelméletet igénylő tananyagok elsajátításához szükséges elméleti alapot kívánja megadni.

Ezen túlmenően célunk, hogy a 21. század számunkra a hétköznapokban némileg láthatatlan folyamatait megértessük. Egészen pontosan az okoseszközeink által nyújtott rengeteg adatunk felhasználási módját ismerhetjük meg lényegében a fejezet anyagának elsajátítása által, hiszen a modern technológiai vívmányok, kutatások és marketingeszközök is teljesen máshogy néznének ki a hálózatelemzés módszertana és eszköztára nélkül.

Minden lelkesedésemmel csak ajánlani tudom az Olvasónak, hogy ne ragadjon le az alapfogalmak néhol száraz megismerésénél és magolásánál, ez a tudományterület sokkal izgalmasabb ezeknél. A tárgynak és a fejezetnek természetesen az a célja, hogy megismertesse az Olvasót a száraz fogalmakkal is, de sokkal jóízűbben lehet őket fogyasztani, ha a tudományágnak utánanézett a neten. Nagyszerű, színes, érdekes videók, riportok, cikkek születtek már a hálózatiságról, a hálózatok tudományáról, a tananyag elolvasása előtt ajánlok egy kis netes szörfözést! Jó szórakozást előre is!

Molnár László (2020): A hálózatelemzés alapfogalmai – gráfok, centralitás, szomszédosság, hidak és a kis világ. In Sasvári Péter szerk.: *Rendszerelmélet.* Budapest, Dialóg Campus. 123–140. DOI: https://doi.org/10.36250/00734.07

2. Hálózatkutatás

2.1. Bevezetés

A Magyar Tudományos Akadémia Szociológiai Intézete a következőt írja a hálózatelemzésről: „A digitális technológiák fejlődésével, a mind komplexebb adatstruktúrák kialakulásával, illetve az egyre kifinomultabb elemzői és adat-vizualizációs módszerek megjelenésével ugyanakkor az elmúlt években a társadalmi jelenségek tanulmányozásának újabb és újabb dimenziói váltak lehetővé." (Ságvári 2017)

A fenti idézetből két dologra következtethetünk mindenképp. Az egyik, hogy a hálózattudomány manapság is intenzíven fejlődik. A másik, hogy a fejlődése és ebből eredően használhatósága is erőteljesen az informatikai vívmányokra épül. Nevezetesen a Big Data (nagy adat) és a világban exponenciálisan növekvő számítási kapacitás teszi lehetővé, hogy a sejtek, atomok szintjétől a világűr óriási erőinek elemzéséig minden az eddiginél hatékonyabban történhessen. A hálózattudomány pedig megjelenik az egyéni és társadalmi viselkedés vizsgálatában is.

A hálózatelemzést például (csak hogy picit jobban lássuk a jelentőségét):

- az ökológiában a tápláléklánc topológiai jellegzetességei,
- a biokémiában a fehérje-fehérje hálózatok,
- a nyelvészetben a szóasszociációs hálózatok,
- a szociológiában és szociálpszichológiában az emberi kapcsolatok hálózata,
- a tudománymetriában a citációs hálózatok,
- a mérnöki tudományokban az elektromos hálózatok, az úthálózatok,
- a társadalomtudományokban a szabadalmi együttműködési hálózatok struktúrájának vagy a vélemények, beállítódások és a viselkedés társadalmi méretű változásainak elemzésére használják (Galambosné Tiszberger 2015).

Jelen fejezet, mivel nem kémikusoknak, mérnököknek és informatikusoknak íródott, így igyekszik a különösebben bonyolult matematikai számolásokat kerülni, és helyette általánosságban koncentrálni a hálózattudomány alapfogalmaira, illetve egyik szegmensére, a társadalmi hálózatokra, mert a szerző úgy gondolja, hogy ezek közelebb állnak az Olvasó szívéhez. A hálózatelemzés esszenciájának illusztrálására még egy idézettel készültem, méghozzá a világhírű magyar kutató, Barabási Albert-László tollából: „Lehetséges, hogy a cselekvéseinket irányító szabályok a maguk egyszerűségében felérnek a gravitáció newtoni törvényének prediktív erejével? Ne adj' Isten, merészkedhetünk-e odáig, hogy megpróbáljuk megjósolni az emberi viselkedést? Korábban az efféle kérdésekre egyetlen válasz létezett: fogalmunk sincs! Ennek következtében ma többet tudunk a Jupiterről, mint a saját szomszédunkról. Valóban, előre tudjuk jelezni egy elektron pályáját, ki-be tudunk kapcsolni géneket, képesek vagyunk robotot küldeni a Marsra, ám tanácstalanul tárjuk szét a kezünket, ha olyan jelenségeket kell előre jeleznünk vagy megmagyaráznunk, amelyekről pedig a legtöbbet illene tudnunk, nevezetesen embertársaink cselekedeteit. Ennek egyszerű oka van. Mindeddig sem adataink, sem eszközeink nem voltak, hogy feltárjuk, valójában hogyan is működünk. A baktériumok nem idegeskednek, ha mikroszkóp alá tesszük őket. A Hold nem perel be, amiért űrhajóval leszállunk a felszínén. Ám egyikünk sem szívesen vetné alá magát olyan durva beavatkozásoknak, mint amilyenekkel a baktériumokat vagy a bolygókat vizsgáljuk – abból a célból, hogy mindig mindent tudjunk róluk.” (BARABÁSI 2010, 18–19.)

2.2. Hálózatelemzés fogalma

A hálózatelemzés különböző egységek, entitások, egyének között fennálló kapcsolatokat elemez. Elemzi ezeknek a távolságát, a számosságát, csomópontokat keres, illetve igyekszik kiszűrni az esetlegesen zavaró, oda nem illő tényezőket. Az egyének és entitások elég széleskörűen meghatározhatók. Lehetnek személyek, számítógépek, városok, épületek, gépjárművek, sejtek, csillagok, lényegében szinte minden, éppen ezért a hálózatelemzés manapság szinte minden tudományterületen megjelenik, illetve a 21. század technológiai vívmányainak, és legfőképpen az internetnek köszönhetően az életünk legtöbb aspektusában is felhasználják cégek, politikai entitások, a közigazgatás és az egyének is.

A hálózatelemzés módszertana a modellezésre épül, így szinte minden igaz rá, amit a modellezési fejezetben megtárgyaltunk. A legfontosabb, hogy bár a hálózatelemzés a valóságot igyekszik a legpontosabb valójában megragadni, hisz így lehet a leginkább releváns elemzéseket végezni, ennek ellenére esetenként szükséges egyszerűsítenie azt.

A gráf, a hálózat, a modell és a rendszer fogalmakat szinte szinonimaként is használjuk. A valóságban a gráf és a hálózat ténylegesen szinte szinonimaként működnek. A hálózat egy valós rendszer leegyszerűsített modellje. Jellegzetessége, hogy az eredeti rendszer részei csúcsokként, egymáshoz való viszonyuk pedig élekként szerepelnek. A csúcsok és élek pedig gráfokat alkotnak a matematikában. A hálózat sokkal összetettebb, mint egy gráf, csúcsai és élei egyéb tulajdonságokkal is felruházhatók, ráadásul a hálózat általában valóságos rendszereket jelöl.

A hálózatelemzéshez szükséges néhány alapfogalom:

- Sűrűség: Egy háló sűrűsége a lehetséges és a létező kapcsolatok arányát jelenti. Egy n elemű hálóban a lehetséges kapcsolatok száma $n \times (n - 1)$. Ha minden lehetséges kapcsolat valóban létezik, azaz mindenki kapcsolatban áll mindenkivel, akkor a sűrűség értéke 1. A „0” sűrűségérték azt jelenti, hogy senki sem áll kapcsolatban senkivel. A sűrűség értéke mindig 0 és 1 közötti szám, amelynek magasabb értékei nagyobb hálózati sűrűséget jeleznek.
- Központiság: A központiság legkézenfekvőbb mérőszáma az egyes pontok kapcsolatainak (fokainak) számát viszonyítja az összes kapcsolathoz. Ezt fokszámközpontiságnak (degree centrality) vagy közelségnek nevezzük. A hálóban kifejezi egy egyednek a többi egyedtől való távolságát.
- A közöttiség (betweenness): központiság egészen eltérő megfontoláson alapul: feltételezi, hogy egy szereplő azért sikeres egy hálóban, mert közvetítő szerepben van két csoport között.
- Sajátvektor (eigenvector): más néven Bonachich centralitás vagy Bonachich hatalmi mutató. Az eljárás a közelséghez hasonló megfontoláson alapszik, de inkább az egész hálóra van tekintettel, és kevéssé a helyi környezetre. Ezek az előnyök persze csak nagy hálók esetében érvényesülnek, kis hálóknál a sajátvektor és a közelség-központiság értékek között minimális a különbség.

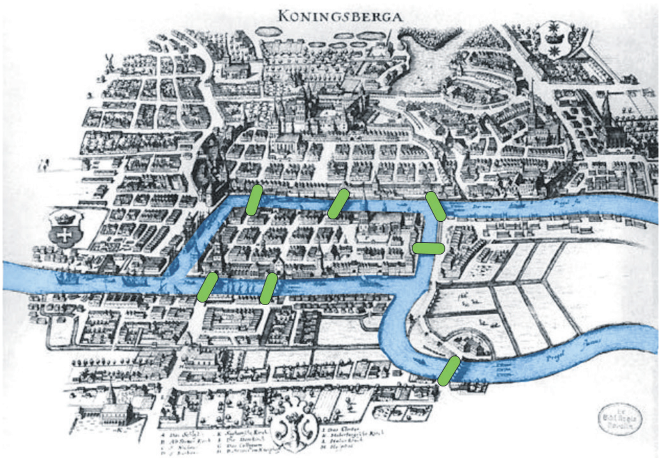
- Strukturális ekvivalencia: A strukturálisekvivalencia-számítás a közel azonos kapcsolati helyzetben lévő szereplők azonosítására, és ezáltal a hálózat komplexitásának redukálására használható. Két szereplő strukturálisan ekvivalens, ha azonos kötéseik vannak a többi hálózati szereplővel.

3. Gráfok és hálózat

Bár a hálózatkutatás számára katalizátorként hat a modern technológia nyújtotta adatbőség és adatbányászati módszerek, nagyjából 300 évvel ezelőttre datálhatjuk a megjelenését. A hálózatok megértéséhez, összefüggéseinek vizsgálatához szükségünk van a matematikában megjelenő gráfelméletre, aminek történelme és kialakulása egyben a hálózatelemzés történelme és kialakulása is.

3.1. Königsberg/Kalinyingrád

A matematikában és a tudománytörténetben egyaránt a königsbergi hidak problémájával kezdődik a gráfelmélet bevezetése. Königsberg egykoron Poroszország egyik történelmi városa, ma Kalinyingrád néven Oroszországnak az anyaországtól távol eső exklávéja. A városban élt és dolgozott egy különleges karakterű ember, Leinhard Euler, akinek a nevéhez kötődik a hidak problémájának megoldása, amelyet 1736-ban bizonyított.



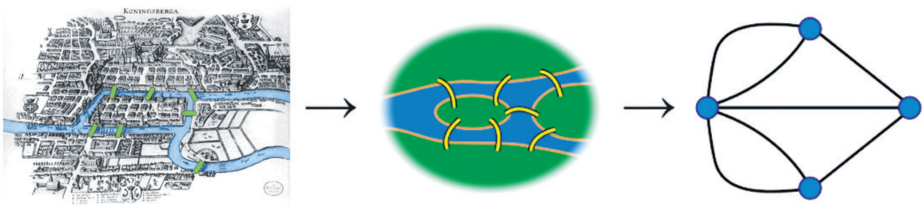
1. ábra

Königsberg térképe Euler idejében, kiemelve a Prégel folyó és a hidak elhelyezkedése

Forrás: Königsbergi hidak problémája, 2016

A városban hét híd ívelt át a várost átszelő Prégel folyón úgy, hogy ezek a folyó két szigetét is érintették. Állítólag a königsbergi elit tagjai rendszeresen sétálgattak vasárnaponként a hidakon egy olyan útvonalat keresve, hogy mindegyiken csak egyszer haladjanak át, és egyúttal visszaérjenek a kiindulópontba. Azzal a kérdéssel fordultak Eulerhez, vajon ez lehetséges-e.

Euler a problémát a gráfelmélet nyelvén fogalmazta meg. Modellezte a valóságot, és meghatározta a csomópontokat (a folyó partjai és a szigetek), amelyekbe belefutnak az élek (a hidak), létrehozva egy gráfot. Euler észrevette, hogy a problémát az így létrehozott gráf csomópontjainak a fokszámára lehet visszavezetni. A csomópont fokszáma alatt az adott csomóponthoz csatlakozó élek számát értjük.



2. ábra

A valós helyzet, annak modellezése és gráfja

Forrás: Königsbergi hidak problémája, 2016

A konkrét esetben a hidak elhelyezkedése alapján megalkotott gráfban három pontnak 3 a fokszáma, egynek pedig 5. Euler azt bizonyította be, hogy akkor és csak akkor létezik egy adott gráfban a hidakon pontosan egyszer végighaladó séta, ha minden csomópont fokszáma páros.

A fenti feltételnek eleget tevő összefüggő gráfokat ma már zárt Euler-gráfnak nevezzük, az élek sorozatát, amelyeken a bejárás megvalósul, pedig Euler-vonalnak, illetve egy zárt Euler-vonalnak. A fenti feltételnek megfelelő bejárást zárt Euler-sétának hívjuk. Mivel a königsbergi hidak gráfjában több páratlan fokszámú csúcspont is található, ezért Euler eredményéből következik, hogy nem lehet bejárni a königsbergi hidakat a fent megkövetelt módon. Az alapfelismerés, hogy a probléma megoldásának a kulcsa a hidak, illetve pontosabban az egy partszakaszhoz kapcsolódó hidak számában, nem pedig ezek konkrét elhelyezkedésében keresendő, a topológiai szemlélet legkorábbi megjelenésének is tekinthető (Galambosné Tiszberger 2015).

A bizonyításból két fontos állítást kell belátnunk, az első, hogy bizonyos problémák megoldása sokkal egyszerűbb, ha gráfként ábrázoljuk őket. A második, hogy be kell látnunk, hogy akármennyire találékonyak vagyunk, nem találunk megfelelő utat a königsbergi hidak problémájára, mert az, hogy van-e ilyen út, az a gráf tulajdonsága, ami jelen esetben nemleges választ ad. A hálózatok működését az ilyen tulajdonságok korlátozhatják, vagy épp segíthetik.

Érdekesség, hogy napjainkban – igaz, csak speciális módon – bejárhatjuk a fenti feltételek mentén a hidakat, már amelyik megmaradt belőlük.

3.2. Kapcsolat a hálózatokkal – élek, csúcsok, fokszám

Korábban megbeszéltük, hogy a gráfok és a hálózatok szinte szinonimák. A hálózattudomány és a gráfelmélet egyes fogalmai megfeleltethetők egymásnak (hálózat = gráf, csomópont = csúcs, kapcsolat = él). Hogy bonyolítsuk, a gráfelmélet fogalmait használja a hálózatkutatás is, amikor a hálózatokat matematikailag ábrázolja.

A hálózatelmélet fontos fogalma a csomópontok száma (jelölése: N) és az élek száma (jelölése: L). Az előbbi hidas problémában $N = 4$ és $L = 7$. Teljes gráfnak nevezzük azt a gráfot, ahol minden pont kapcsolódik az összes többi ponthoz. Egyszerű példa erre egy iskolai osztály, ahol mindenki mindenkinek az osztálytársa.

A hálózat élei lehetnek:

- irányítottak és
- irányítatlanok.

Irányított élekről beszélünk, ha van valamiféle egy irányba mutató logika a kapcsolatban. Például egy telefonhívás esetén a két csomópont (személy) közötti él irányított, mivel az egyik személy a hívó a másik a hívott.

Irányítatlan élekről beszélünk, ha nincs egy irányba mutató logika a kapcsolatban, a két csomópont oda-vissza irányban kapcsolódik egymáshoz. Például ilyen egy osztálytársi kapcsolat. Jani és Ildi osztálytársak. Ez mindkét irányból nézve igaz, hisz ha Janinak osztálytársa Ildi, akkor Ildinek is osztálytársa Jani. Ennyire egyszerű.

A hálózat irányított (digráf), ha minden éle irányított, következésképp irányítatlan, ha minden éle irányítatlan. Természetesen vannak olyan hálózatok, amelyek irányítottság szempontjából vegyesek.

Fontos fogalom továbbá a fokszám (jele: k). A fokszám a csomópontok kapcsolatainak (éleinek) számát jelöli. A königsbergi példa alapján az egyes pontjaink fokszámai: $k_1 = 5$, $k_2 = 3$, $k_3 = 3$ és $k_4 = 3$ (a sorrend igazából itt mindegy, a k_3 is lehetne akár az 5).

A hálózattudományban fontos jellemző egy-egy hálózat fokszáma, illetve átlagos fokszáma (jele: $\langle k \rangle$). Irányítatlan hálózatban a fokszámot a pontok fokszáma összegének kettővel való osztása adja meg, mivel minden él kétszer jelenik meg bennük. Matematikai jelölés:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} k_i$$

Az irányítatlan hálózatban az átlagos fokszám az élek számának kétszerese (mivel minden pontba befut egy-egy él, tehát egy él megjelenik A pont éleként is, illetve B pont éleként is, ha kettejüket összeköti) osztva a csomópontok számával, tehát:

$$\langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

Bonyolultabb egy fokkal a helyzetünk, ha irányított hálózat fokszámát szeretnénk megkapni, mivel itt figyelnünk kell, hogy az adott élek bejövők vagy kijövők. A bejövő fokszám jele k_i^{be} , ez az i-edik pontba mutató kapcsolatok számát adja meg, míg a kijövő fokszám, k_i^{ki} , az i-edik csomópontból más pontokba mutató kapcsolatok száma.

$$k_i = k_i^{be} + k_i^{ki}$$

Viszont némileg egyszerűbb a dolgunk, amikor az irányított hálózat átlagos fokszámára vagyunk kíváncsiak. Itt ugyanis az élek számát *(L)* egyszerűen elosztjuk a csomópontok számával *(N)*.

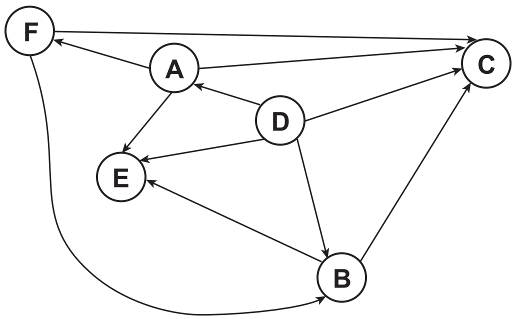
A másik fontos tulajdonsága egy hálózatnak a fokszámeloszlás (jele: p_k), ami annak a valószínűségét adja meg, hogy a hálózatban egy véletlenszerűen kiválasztott pontnak éppen k legyen a fokszáma. Mivel a p_k-k valószínűségek, így összegüknek 1-nek kell lennie!

A fokszámeloszlás fontos szerepet játszik a hálózatok elméletében a skálafüggetlen hálózatok felfedezése óta. A legtöbb hálózati tulajdonság kiszámolásához ugyanis szükségünk van erre az értékre. A fokszámeloszlás alakja erősen hat jó néhány hálózati jelenségre is (például hálózat robusztussága vagy vírusok terjedése) (Barabási 2016).

Fontos látnunk, hogy a gráfok önmagukban nem feltétlen hasznosak hálózatelméleti szempontból. A hálózatelemzés akkor sikeres, ha a csomópontokat és a kapcsolatokat körültekintően határozzuk meg, és van megválaszolandó kérdésünk. Lehet egy tökéletesen felépített gráfom, például minden A betűvel kezdődő települést összekötök egymással, és minden B kezdőbetűjűt is összekötök egymással stb., akkor is kapok egy jól meghatározott hálózatot, de sok értelme nem lenne elemezni, mert a kezdőbetűk alapján nem lesz semmilyen érdemi kapcsolat közöttük, mégis nagyszerű gráfok.

3.3. Szomszédosság és szomszédossági mátrix

A szomszédosság az egyik legfontosabb tulajdonság a hálózatelemzés során, hisz ha nincs szomszédosság, akkor nincsenek lényegében elemezhető adataink sem. A szomszédosság fogalmának megértéséhez használjunk egy egyszerű szociogramot. A szociogram a személyes kapcsolatok hálózatának grafikus ábrázolása. A *3. ábrán* egy egyszerű szociogramot láthatunk.



3. ábra

Egyszerű szociogram

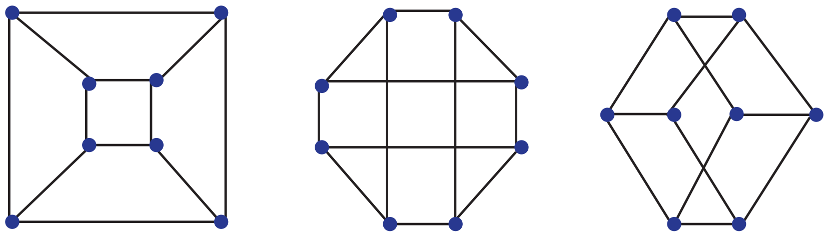
Forrás: Galambosné Tiszberger 2015

A hálózat csúcspontjait jelen esetben egyének alkotják, neveik helyett betűket használtunk. Az egyes személyek közötti relációkat nyilván a vonalak ábrázolják. Két pontot akkor tekintünk szomszédosnak, ha azok között legalább egy reláció van közvetlenül. A szomszédosság nem függ az ábrán való távolságtól, így gráfelméleti szempontból, ha Budapest és New York között van egy kapcsolat, akkor szomszédosnak mondhatjuk őket.

Sokszor nemcsak a kapcsolatok léte adhat nekünk információkat, hanem azoknak a hiányára is érdemes koncentrálnunk. A szomszédosság vizsgálatának másik fontos eleme, hogy a közvetlen hatásokat mutatja be (vagyis a gráfon belüli út hossza ekkor 1), de ettől függetlenül közvetetten hathat egymásra két nem szomszédos pont (ekkor a gráfon belül a két pont közötti út hossza 1-nél nagyobb).

A gráfelmélet rendkívül jó eszköz számunkra a szociológia területén népszerűvé vált hálózati kapcsolatok és struktúrák elemzésében, az úgynevezett kapcsolatháló-elemzésben (SNA – social network analysis). A gráfok jól modellezik a valós kapcsolatokat, viszont az ábrázoláskor érdemes figyelnünk arra, hogy a hossz mellett a pontok elhelyezkedése sem hordoz különösebb információt.

Ha két gráf látszólag különböző, akkor is megtörténhet, hogy ugyanazt fejezik ki. Ekkor azt mondjuk, hogy a két gráf izomorf. Két gráfot akkor nevezünk izomorfnak, ha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen és illeszkedéstartóan megfeleltethetők egymásnak. Két izomorf gráf teljesen eltérően ábrázolható, de a pontok elhelyezkedése nem módosítja a jelentést, maximum megkönnyíti vagy megnehezíti annak értelmezését.



4. ábra

Izomorf gráfok

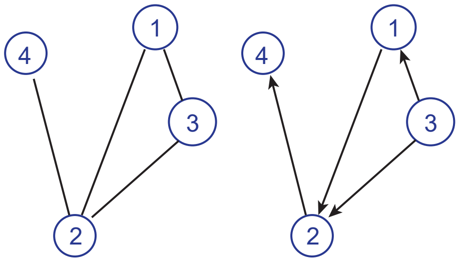
Megjegyzés: Máshogy ábrázoltam őket, de éleik, csomópontjaik száma, illetve fokszámuk is megegyezik, ha számozással jelölném az egyes pontokat, akkor pedig a szomszédosság egyezősége is látszana

Forrás: GALAMBOSNÉ TISZBERGER 2015

A szomszédosságot érdemes valamilyen módon ábrázolnunk, hisz a hálózatelemzésnél fontos ismernünk ezeket, és nem feltétlen jó, ha mindig, minden ábrán egyesével keresgetjük őket. Ennek egyik alapvető eszköze a szomszédossági mátrix, amelyet manuálisan is könnyű elkészíteni, de számítógépek algoritmusok segítségével kitűnően tudják alkalmazni több millió szomszédosság elemzésénél is.

A szomszédossági mátrix, ahogy a neve is mutatja, egy mátrix. A mátrixok pedig sorokból és oszlopokból állnak. A szomszédossági mátrixok négyzetes mátrixok, tehát $N \times N$-es mátrixok, ami azt jelenti, hogy ugyanannyi soruk és oszlopuk van. Nem véletlen, hisz a szomszédosság kétirányú.

A mátrix elemei a következők:
$A_{ij} = 1$, ha él mutat a j-edik pontból az i-edik pontba.
$A_{ij} = 0$, ha nem mutat él a j-edik pontból az i-edik pontba.



5. ábra
Két gráf, a bal oldali irányítatlan, a jobb oldali irányított

Forrás: a szerző szerkesztése

Nézzünk egy példát az *5. ábra* gráfjai alapján. Sejtjük, hogy az irányítottság bonyolítja az életünket.

Kezdjük a bal oldali, irányítatlan gráffal.
$A_{12} = 1$, mert él mutat a 2-es pontból az 1-esbe.
$A_{14} = 0$, mert nem mutat él a 4-es pontból az 1-esbe.

Ugyanígy felírható a többi pont is vizsgálat után.

Nézzük most meg az irányított gráfot, tehát a jobb oldalit, ahol nyilak jelzik a kapcsolat irányát.

$B_{12} = 0$, mert az 1-es pontból megy él a 2-esbe, de a 2-esből nem megy az 1-esbe!
$B_{14} = 0$, az irányítottság nem változtatott azon, hogy a 4-es és az 1-es között nincs szomszédosság.
$B_{21} = 1$, mivel él mutat az 1-es pontból a 2-esbe.

A kapott eredmények alapján fel lehet írni a következő mátrixokat behelyettesítve a 0-ás és 1-es értékeket a következő általános alakú mátrixba, ami jelen esetben 4 × 4-es:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$$

Így a következő mátrixokat kapom:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Illetve:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

A két kapott mátrixban félkövérrel, illetve piros betűszínnel jelöltem egy fontos dolgot, ez nem más, mint a szomszédossági mátrix egyik hasznossága. Egy-egy pont fokszámát ki tudom nyerni belőle, ha a megfelelő oszlopot vagy sort nézem. Az A mátrix esetén, amely az irányítatlan hálózatomat mutatja, a 2-es pont fokszámát kapom meg, ami $k = 3$. Onnan tudom ezt, hogy a mátrix 2. sorában (de nézhetem a 2. oszlopot is) lévő számjegyek összege: $1 + 1 + 1 = 3$.

Természetesen itt is más a helyzet, ha irányított gráfról beszélünk, tehát ha a B szomszédossági mátrixot nézzük. Ennek a mátrixnak most a 3-as pontja fokszámát szeretném megtudni. Mivel irányított, ezért tudjuk, hogy kétféle fokszáma van, egy bejövő fokszáma és egy kijövő. A bejövőt úgy kapom meg, hogy nézem a megfelelő sort: $0 + 0 + 0 + 0 = 0$. A kijövő fokszámot pedig úgy, hogy nézem a megfelelő oszlopot, tehát: $1 + 1 = 2$. Ha ránézünk az ábrára, láthatjuk is, hogy a 3-as pontból két él vezet ki másik pontokra, míg 0 él vezet be hozzá.

A gráfelmélet ezen eszköze hasznos matematikai modellek készítésénél és kisebb hálózatok elemzéséhez (informatikával támogatva nagyobbakhoz is), ugyanakkor van vele egy nagy probléma, méghozzá az, hogy a valóságos hálózatok általában ritka hálózatok. A ritka hálózatok attól ritkák, hogy a lehetséges élek maximális száma és a valós élszám között gyakran hatalmas a különbség. ($L << L_{max}$)

Ez azt jelenti, hogy a szomszédossági mátrixban az információval igazán bíró 1-esek elég ritkák a 0-ákhoz képest. Egy óriási szomszédossági mátrixot, mint például a World Wide Web, amely egybilliónál is több webdokumentumot tartalmaz ($N > 10^{12}$), nem igazán éri meg felrajzolni (még géppel sem), mert rengeteg felesleges tárhelyet pazarolnánk, illetve számítási kapacitást is lekötnénk. Ezért a hálózatkutatásban a szomszédossági mátrix ritka, a valós hálózatoknak elegendő ugyanis csak a kapcsolatait tárolni (a 0-tól különböző A_{ij} elemeket).

Érdemes még megemlíteni azt is, hogy a gráfokban kialakulhatnak hurkok. Hurok akkor keletkezik, ha egy hálózatbeli elem kölcsönhatásba kerül önmagával, tehát van olyan él, amely saját magát köti össze saját magával. A szomszédossági mátrixunkban ilyen esetben előfordulhat, hogy a mátrix főátlójában (a bal felső elemtől a jobb alsó elemig tartó átló) az adott pont önmaga metszeténél nem 0-át kapunk, hanem 1-et, vagy más számot, a hurokélek számától függően. A figyelmes olvasó felkaphatja a fejét, hogy más számot is kaphatunk? Hát persze, nem feltétlen kell az informatika kettes számrendszerében maradnunk a szomszédossági mátrixban sem…

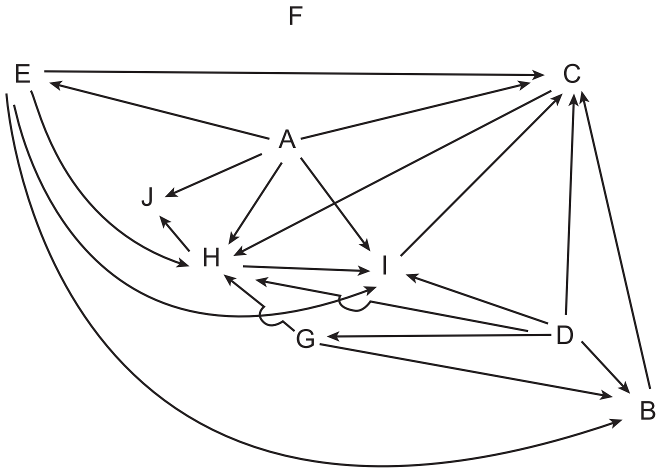
3.4. Súlyozott hálózatok

Az utóbbi példa olyan hálózatot mutatott be, amelyben a kapcsolatok mind azonos súlyúak voltak, vagyis $A_{ij} = 1$ volt. A valóságban és a hálózatelemzés alkalmazási területén azonban súlyozott hálózatokat kell vizsgálni. A súlyozott hálózatokban minden *(i, j)* kapcsolatnak van w_{ij} súlya. Telekommunikációs hálózaton kapcsolat lehet egy beszélgetés, míg súlya lehet a beszélgetés hossza. Érthető azt hiszem, hogy 2 beszélgetés között adatelemzés szempontjából érdemes különbséget tennünk, ha az egyik 1 perces, a másik 1 órás. A szomszédossági mátrix elemei megadják a súlyozottságot. $A_{ij} = w_{ij}$.

Sokszor a súlyozottság értékét nehéz kiszámítani, és gyakran nem is pontos értéket kapunk, sok torzító tényező léphet fel, például egy telefonbeszélgetés hossza lehet egyedi eset, okozhatja akár rossz térerőből vagy háttérzajból fakadó értetlenség stb. Éppen ezért csak közelítőleg vizsgáljuk a súlyozottságot, és inkább igyekszünk súlyozatlan hálózatokat elemezni, de azért mindig figyelembe kell venni, hogyan módosíthatják a súlyok a hálózat tulajdonságait.

3.5. A hálózatok morfológiai jellemzői

Az eddigi fogalmaink bővítése érdekében vegyünk egy újabb hálózatot, egy bonyolultabb, irányított gráfot sok-sok nyíllal, ráadásul egy F ponttal, amely kapcsolat nélkül lebeg a semmibe, ezzel egy nem összefüggő gráfot teremtve nekünk. Ez a gráf különböző cégek közötti pénzügyi tranzakciók irányát mutatja.



6. ábra

Vállalatok közötti pénzügyi tranzakciók szociográfiája

Forrás: Szántó 2005

Egy tetszőleges irányított gráfban a hálózati pontok $N(N-1) / 2$ számú párjai között a gráfok három különböző típusa fordulhat elő:

1. kölcsönös;
2. aszimmetrikus
3. és hiányzó.

Kölcsönös (szimmetrikus) kapcsolatok esetén a nyilak két irányba (mindkét szereplő felé) mutatnak. Az ábrán például a H és az I között. Egyirányú (aszimmetrikus) kapcsolatok esetén megkülönböztethetjük a küldő és a fogadó alanyt. A nyilak ilyenkor a küldő alany felől a fogadó felé mutatnak (például a D küldőtől a G fogadó felé). Összességében ábránkon egy kölcsönös, húsz aszimmetrikus és huszonnégy hiányzó kapcsolat van feltüntetve.[1]

A két szereplő alkotta párok (diádok) esetén az összefüggőség (onnectedness) fogalma mutatja meg, hogy milyen különböző lehetőségek vannak két tetszőleges pont között a közvetlen kapcsolódásra:

- 0. fokon összefüggő pontok, amelyek között nem létezik semmiféle kapcsolat;
- 1. fokon összefüggő pontok, amelyeket irányítás nélküli gráf köt össze egymással;
- 2. fokon összefüggő pontok, amelyeket az egyik irányban irányított gráf köt össze egymással;
- 3. fokon összefüggő pontok, amelyeket mindkét irányban irányított gráf kapcsol egymáshoz.[2]

Ábránkon a B és I 1. fokon összefüggő pontok C-n vagy D-n keresztül (az őket összekötő út hossza: 2); továbbá, 2. fokon összefüggő pontok C-n és H-n keresztül (az őket összekötő út hossza: 3). A H és I viszont (szomszédos) 3. fokon összefüggő pontok.

A fentiek alapján a teljes gráf szintjén az összefüggőség fogalmának jelentése az alábbi módon körvonalazható. A gráf:

- erősen összefüggő, ha a pontjai alkotta valamennyi diád 3. fokon összefüggő;
- egyoldalúan összefüggő, ha a pontjai alkotta valamennyi diád 2. fokon összefüggő;
- gyengén összefüggő, ha a pontjai alkotta valamennyi diád 1. fokon összefüggő; s végül
- nem összefüggő (disconnected), ha van legalább egy olyan pontja, amelyet nem fűz semmiféle kapcsolat a gráf többi pontjához.

A *6. ábra* a már említett F pont miatt nem összefüggő. Tekintsünk el ettől a ponttól, ekkor egy gyengén összefüggő gráfot kapunk.

Ha egy összefüggő gráfban található olyan pont, amelynek elmozdítása olyan gráfot eredményez, amely már nem tekinthető összefüggőnek, akkor nagy valószínűséggel mondhatjuk, hogy a szóban forgó ponttal jelölt szereplő közvetítő szerepet tölt be a hálózat két részhalmaza között. Az ilyen pontot nevezzük *töréspontnak* (cut point). (Egy pont eltávolítása magának a pontnak és kapcsolatnak az egyidejű „törlését" jelenti.) *Hídnak* viszont azt a kapcsolatot (relációt) nevezzük, amelynek az elmozdítása megszünteti egy gráf összefüggő jellegét.

3.6. A hálózatok további jellemzői

A hálózatok további fontos jellemzője az egymásbaágyazottság. Ez azt jelenti, hogy a hálózatok egymásba épült rendszerek, és a vizsgálat, nézőpont szintjétől függ, hogy ebből éppen

[1] TAKÁCS 2011.

[2] SZÁNTÓ 2005.

mit látunk. Az egymásbaágyazottság nagyon gyakran a kölcsönös előnyök révén jön létre, vagyis a szimbiózis vezérli. A hálózatok ilyen integrációjához az szükséges, hogy az alhálózatok hosszabb időn keresztül stabilak legyenek. Sokszor előfordul, hogy a szimbiózisban élő alhálózatok megtartják eredeti önállóságuk egy részét, és az általuk alkotott főhálózat moduljaiként élnek tovább. Modulok több hálózatban megfigyelhetők. A modulok között a kapcsolatok viszonylag ritkábbak, és az egyes modulok csomópontjai igen gyakran csak egy vagy több elemen át tudnak érintkezni egymással (Galambosné Tiszberger 2015).

A következő ismérv a gyengekapcsoltság. A gyenge kapcsolatok olyan kölcsönhatások, amelyeknek kicsi az affinitása, kicsi a valószínűsége, és rövid ideig tartanak. Ugyanakkor ezek azok a kapcsolatok, amelyek a kisvilágság kialakulásához szükségesek. A hálózatokban az elemek nem egyformák, és a közöttük fennálló kapcsolatok is lehetnek erősek és gyengék egyaránt. A valós hálózatokban nemcsak a kapcsolódási fokok, a térbeli megoszlás, az időbeli viselkedés, hanem a kapcsolatok erőssége is skálafüggetlen eloszlást mutat. Ez azt jelenti, hogy valós hálózatokban az erős kapcsolatok mellett mindig ott vannak a gyengék is, ráadásul a legtöbb hálózatban sokkal több gyenge kapcsolatot találunk, mint erőset. A gyenge kapcsolatok az egymásbaágyazottságot is „áthatják" (Galambosné Tiszberger 2015).

4. Hálózatelemzés a gyakorlatban

4.1. Mekkora a világunk? Kicsi.

Az emberek közti interakciók a valós és online térben egyaránt vizsgálhatók tudományosan. Magyarország és a világ egyik legelismertebb hálózatkutatója, Barabási Albert-László munkássága pedig segít nekünk abban, hogy még inkább megérthessük az összefüggéseket például az online kommunikáció terén.

A hálózatok egyik eleme a kapcsolatok száma. A véletlen hálózat elv egyik fontos előrejelzése, hogy annak ellenére, hogy véletlenszerűen helyezzük el a kapcsolatokat, az ebből származó hálózat mélyen demokratikus, hiszen a legtöbb csomópontot hozzávetőleg ugyanannyi kapcsolat jellemzi. A látszólag véletlen hálózatoknak hitt emberi hálózatokat Barabási elemzi, és arra jut, hogy a valós világunkban meglévő hálózatok – akár a sejtjeinké, akár az emberi kapcsolatainké – azonban nem véletlen hálózatok, viszont a véletlenhálózat-modell jó néhány számszerű előrejelzéssel szolgálhat, ha valós hálózatokat elemzünk (Barabási 2016), így a segítségével például végig lehetne követni a hírek terjedését is.

Karinthy Frigyes 1929-ben írt először egy novellájában a *„hat lépés távolságról"* (*Facebook users average 3.74 degrees of separation,* 2011). Stanley Milgram harvardi szociológus 1967-ben állította: a társadalomban két személy tipikusan öt-hat kézfogásra van egymástól, és ezt nevezzük manapság a tudományosan is elismert hatlépésnyi távolságnak. Vagyis, bolygónk hatmilliárd lakosa ellenére, „kis világban" élünk. Az internet is egy kisvilágot jelöl Barabási kutatásai alapján, két weblap közti klikkelések tipikus száma 19, a több mint milliárd lap ellenére. Ezt hívja ő 19 lépésnyi távolságnak (Barabási 2006).

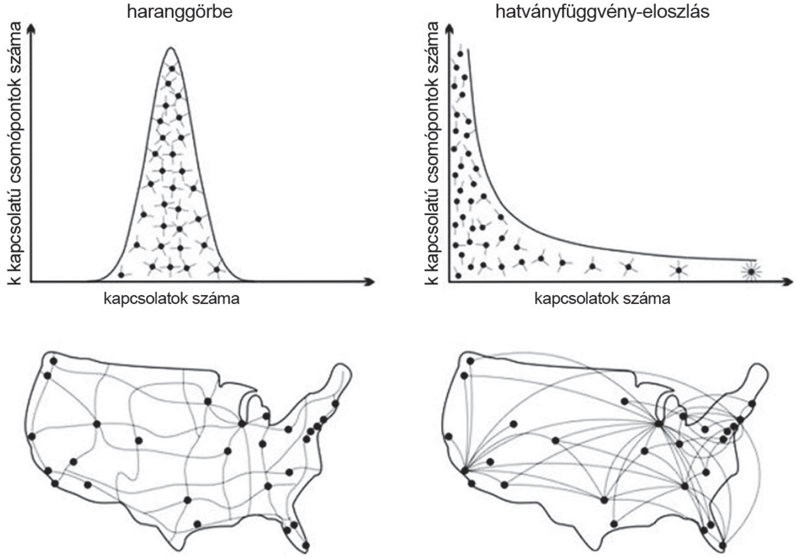
Ebből világosan látszik, hogy az emberek alkotta véletlen hálózatokban és az interneten fellelhető lapok alkotta hálózatokban egyaránt röviden bejárható utakat kell megtennie egy-egy üzenetnek, ha el akar jutni egy másik emberhez vagy oldalhoz. Olyannyira, hogy az olyan elkülönült részegységén az internetnek és a társadalomnak, mint a Facebook közösségi oldal, ez a szám 2011-ben csupán 3,74 lépésre szűkül (4 lépés távolság) (*Facebook users average 3.74 degrees of separation,* 2011).

Az internet úgynevezett *skálafüggetlen* hálózat, amely központi csomópontokból (központok), azokhoz kapcsolódó csomópontokból és kapcsolatokból áll. A *7. ábra* jól szemlélteti a véletlen hálózatok és a skálafüggetlen hálózatok közti különbséget.

A bal oldali térképen az USA főbb autóútjainak hálózatát láthatjuk, amely egy véletlenszerű hálózat csomópontokkal, amelyek a városok, és kapcsolatokkal, amelyek az autópályák. Nincsenek több száz autópályás városok, ahogy olyanok se, amelyek ne kapcsolódnának az úthálózathoz.

A jobb oldali térképen a légi közlekedés hálózatát láthatjuk, ami már egy skálafüggetlen hálózat. Itt a repülőterek a csomópontok, és a kapcsolatok a közvetlen járatok. A legtöbb repülőtér kicsi, néhány járat használja, de vannak olyan nagy és fontos középpontok (például Chicago), amelyek több kisebb csomópontot kötnek össze egymással.

A különbség abban áll, hogy a véletlen hálózatoknál ahhoz, hogy egyik városból a másikba, több más pontot is érintenünk kell, míg a skálafüggetlennél gyakran elegendő egy középpontot érintenünk ahhoz, hogy bárhova eljussunk. Lényegében lerövidítve még inkább az utat (BARABÁSI 2016).



7. ábra
Véletlenszerű hálózat (bal oldali ábrák) kontra skálafüggetlen hálózat (jobb oldali ábrák)

Forrás: VÁSÁRHELYI 2011

Számunkra ez azért is lehet fontos, mert az interneten vannak olyan középpontok a közösségi oldalakon például, úgynevezett véleményvezérek, akik sokkal jobban le tudják rövidíteni a távolságainkat, amelyek amúgy sem túl hosszúak. Létrejönnek az úgynevezett ultrakis világok (BARABÁSI 2016).

Az ilyen véleményvezér személyek, oldalak pedig kiemelt helyet tölthetnek be a közigazgatás egyes hivatalainak megítélésében, vagy valamilyen hír, közlendő terjedésében, hisz ha ők osztanak meg ilyen tartalmakat, sokkal gyorsabban és sokkal több emberhez eljutnak. Fontos lehet még ez az álhírek, politikai propaganda vagy reklámok, kiemelten a vírusvideók terjedése esetén is. Ennek a jelenségnek a gazdasági és társadalmi aspektusait sem szabad alábecsülnünk.

4.2. A világ skálafüggetlen vagy véletlen hálózatokból áll?

Barabási Albert-László egyik felfedezése, hogy a természetben előforduló hálózatok jelentős része nem véletlenszerű hálózat, hanem skálafüggetlen. A világhálót kutatva véletlenszerű eloszlást vártak a kutatók, de megdöbbentő módon ez nem igazolódott, kiderült, hogy más matematikai modell írja le a világhálót, akár a weboldalak, akár a számítógépek kapcsolatait vizsgálták.

Korábban a hálózatelmélet azon alapult, hogy a hálózatok véletlenszerűen jönnek létre. Ez azonban a komplex hálózatokra nem igaz: sem a szociális háló, sem például az élő anyag biokémiai rendszere nem véletlenszerű. Sőt Barabási és kutatócsapata megállapította azt is, hogy a természetben nem léteznek véletlenszerű hálózatok.

A kapcsolatokat egy jól meghatározott matematikai törvény, a skálafüggetlen eloszlás magyarázza. A legfőbb különbség a véletlenszerű és a skálafüggetlen hálózatok között a rengeteg kapcsolattal rendelkező, úgynevezett erősen kapcsolt csomópontok jelenléte az utóbbiakban.

A hálózatelemzés gyakorlati jelentősége leginkább abban rejlik, hogy rengeteg dolog megjósolható általa, rengeteg jelenség pedig utólagosan rendszerbe helyezhető. Barabási egyik kísérlete alapján egy embert bizonyos ideig megfigyelve és adatokat gyűjtve a viselkedéséről megjósolható, korcsoporttól függetlenül, hogy pár hét múlva pénteken este 8 órakor hol lesz épp. Lassan beköszönt a gondolatbűnözés orwelli rémképe? Nem valószínű azért, de mindenképpen fontos fél szemmel a hálózatelemzés fejlődésére figyelnünk.

5. Összefoglalás

A gráfelmélet egy viszonylag fiatal területe a matematikának. A hálózattudomány teljes potenciáljában pedig egy nagyon friss és jelenleg dinamikusan fejlődő ága. A teljes megértéséhez és használatához szükség van adatbázis-kezelési ismeretekre, némi matematikai, statisztikai és esetleg programozói tudásra. Ami pedig ennél is fontosabb talán, sok-sok adatra. A fejezetnek nem volt célja egyiket sem megadni az olvasó számára, helyette elméleti megalapozást szerettünk volna nyújtani. Tekintsük át, hogy mit tanulhattunk meg.

Megismerkedtünk kedvcsinálónak pár példával, hogy hol használják a hálózatelemzést, illetve a hálózatelemzés néhány alapfogalmával is, úgymint a sűrűség, a központiság, a közöttiség, a sajátvektor, a strukturális ekvivalencia.

Felidéztük a gráfelmélet születését a Königsberg egykori és mai hídjainak példáján keresztül, majd szintén ezt a példát felhasználva a gráfok legalapvetőbb fogalmait ismerhettük meg. Megnéztük néhány egyszerűbb képlet segítségével a gráfok és hálózatok alapvető tulajdonságait, majd egy hosszabb fejezet erejéig a szomszédosság fogalmát ecsetelgettük, hisz anélkül nem nagyon tudnánk hálózatokat elemezni.

Megvizsgáltuk, milyen morfológiai jellemzőkkel bírhatnak egyes hálózatok az alapfogalmak szintjén, és egy példán keresztül be is mutattuk ezeket. Végül pedig a véletlen és a skálafüggetlen hálózatokat vizsgáltuk meg, és a kisvilág-jelenséget tisztáztuk, csakhogy megtudjuk, hogy a világ legbefolyásosabb, leggazdagabb, legboldogabb, legsikeresebb embereitől alig pár ismerős távolságra vagyunk. Igaz, a világ legkevésbé befolyásos, éhező, szenvedő nincstelenjeitől szintén ugyanekkora távolságra állunk.

A hálózattudomány nagyon izgalmas téma. A jelen tankönyvbe nem tudunk belesűríteni ezernyi izgalmas felhasználási módot és a tudományos, valamint a laikus közönség számára egyaránt izgalmas összefüggést és érdekességet, ami a gyakorlatban már most képes lenne kimozdítani a világunkat a sarkából. Ismétlem a fejezet eleji önmagam: minden lelkesedésemmel csak ajánlani tudom az Olvasónak, hogy ne ragadjon le az alapfogalmak néhol száraz megismerésén és magolásán, ez a tudományterület sokkal izgalmasabb, nézzen utána a neten, nagyszerű videók, riportok, cikkek születtek már a hálózatiságról, hálózatok tudományáról.

Fogalmak

- hálózatelemzés
- Big Data
- gráf, hálózat
- csúcsok, csomópontok
- élek, kapcsolatok
- sűrűség
- központiság
- közöttiség
- sajátvektor
- strukturális ekvivalencia
- königsbergi hidak
- Euler
- Euler-gráf
- Euler-séta
- csomópontszám
- élek száma
- teljes gráf
- irányított él / irányított (digráf) hálózat
- irányítatlan él / irányítatlan hálózat
- fokszám
- átlagos fokszám
- fokszámeloszlás
- skálafüggetlen hálózatok
- szomszédosság
- szomszédossági mátrix

– szociogram
– út
– kapcsolatháló-elemzés (SNA – social network analysis)
– izomorf gráfok
– négyzetes mátrix
– bejövő és kijövő fokszám
– ritka hálózatok
– hurok
– főátló
– súlyozott hálózat
– gráfkapcsolatok
– összefüggőség
– diádok
– töréspont
– híd
– centralitás
– egymásbaágyazottság
– gyengekapcsoltság
– kis világ
– „x” lépés távolság

Áttekintő kérdések

1. Mi mindenre lehet használni ön szerint a hálózatelemzést? Próbáljon keresni olyan példát, amelyre biztosan nem!
2. A hálózatelemzés alapfogalmaival próbálja meg jellemezni környezetének valamelyik hálózatát, például az ön szociális hálóját vagy az internetet stb.!
3. Azt tudjuk, hogy a königsbergi hidakra eredeti formájukban nincs megoldás. Módosítsa úgy az ábrát, hogy megoldható legyen a feladat!
4. Rajzoljon fel egy egyszerű szociogramot, például két-három film színészeivel (legalábbis a legfontosabbakkal), akik közül pár legalább két filmben közösen játszik. Ezután vizsgálja meg az így készült gráfot! Készítse el a szomszédossági mátrixát!
5. Az előző kérdésben elkészült hálózatát vagy a 3.3. fejezet szociogramját elemezze a hálózatok morfológiai jellemzői alapján!
6. Próbálja ki valamelyik kisvilág-elméletet! Próbáljon eljutni egy olyan ismert személyhez ismerőseinek ismerősein keresztül, aki önnek valamiért nagyon kedves, de Önnek nem közvetlen ismerőse, és elsőre nem is jut eszébe olyan személy, aki konkrétan ismerné! A feladat kissé időigényes lehet, de annál izgalmasabb!

Felhasznált irodalom

Barabási, A.-L. (2006): A hálózatok tudománya: a társadalomtól a webig. *Magyar Tudomány,* 11. sz. 1298. Elérhető: www.matud.iif.hu/06nov/03.html (A letöltés dátuma: 2017. 11. 24.)
Barabási, A.-L. (2010): *Villanások – a jövő kiszámítható.* Budapest, Nyitott Könyvműhely.

BARABÁSI, A.-L. (2016): *A hálózatok tudománya.* Budapest, Libri.

Facebook users average 3.74 degrees of separation (2011). BBC Technology. Elérhető: www.bbc.com/news/technology-15844230 (A letöltés dátuma: 2017. 11. 26.)

GALAMBOSNÉ TISZBERGER, M. (2015): *A hálózatkutatás módszertani vizsgálati lehetőségei – szakirodalmi összefoglalás.* Pécs, Pécsi Tudományegyetem.

Königsbergi hidak problémája (2016). Wikipedia.hu. Elérhető: https://hu.wikipedia.org/wiki/K%C3%B6nigsbergi_hidak_probl%C3%A9m%C3%A1ja (A letöltés dátuma: 2018. 02. 15.)

SÁGVÁRI, B. (2017): *Hálózatelemzés.* MTA Társadalomtudományi Kutatóközpont – Szociológiai Intézet. Elérhető: http://szociologia.tk.mta.hu/halozatelemzes (A letöltés dátuma: 2018. 02. 15.)

SZÁNTÓ, Z. (2005): A társadalmi kapcsolatháló-elemzés szociometriai gyökerei. In LETENYEI L. szerk.: *Településkutatás szöveggyűjtemény.* Budapest, TeTT Könyvek. 649–662. Elérhető: www.socialnetwork.hu/cikkek/7%201szantohalo.pdf (A letöltés dátuma: 2018. 02. 15.)

TAKÁCS, K. (2011): *Kapcsolatháló elemzés; Társadalmi kapcsolatháló elemzése.* Digitális Tankönyvtár. Elérhető: www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0010_2A_08_Kapcsolathalo_elemzes_szerk_Takacs_Karoly/index.html (A letöltés dátuma: 2018. 02. 13.)

VÁSÁRHELYI, O. (2011): *Bevezetés a hálózatok világába II. – Skálafüggetlen hálózatok és marketing.* Elérhető: http://piackutatas.blog.hu/2011/03/21/bevezetes_a_halozatok_vilagaba_ii_skalafuggetlen_halozatok_es_marketing (A letöltés dátuma: 2017. 11. 26.)

Ajánlott irodalom

BARABÁSI A.-L. (2003): *A hálózatok Achilles-sarkai.* Kérdező: BODOKY T. Elérhető: http://magyarnarancs.hu/belpol/a_halozatok_achilles-sarkai_barabasi_albert-laszlo_fizikus-63795 (A letöltés dátuma: 2018. 02. 15.)

KÜRTÖSI, Z. (2002): *A társadalmi kapcsolatháló elemzés módszertani alapjai.* Elérhető: www.socialnetwork.hu/cikkek/modszertan_osszefoglalo1.htm (A letöltés dátuma: 2018. 02. 14.)

POKORÁDI, L. (2008): Rendszerek és folyamatok gráfmodellezése. *Szolnoki Tudományos Közlemények.* 12. évf. Elérhető: http://tudomany.szolnok-mtesz.hu/kulonszamok/2008/cikkek/pokoradi-laszlo.pdf (A letöltés dátuma: 2018. 02. 14.)