HORVÁTH ISTVÁN–SZELLŐ LÁSZLÓ

EXPANDED BOLYAI GEOMETRY

CIKKSOROZAT A KITERJESZTETT BOLYAI GEOMETRIÁRÓL: I. BOLYAI JÁNOS ÚJ, MÁS VILÁGA

Cikkünkben egy új megközelítésben tárgyaljuk a Bolyai geometria, az Euklideszi geometria és a Riemann geometria cosinus tételeit. E megközelítés keretein belül ezek speciális esetként adódnak.

This article shows a new approximation cosinus theorem of geometry of Bolyai, Euclides and Riemann. From this pont of view these are special cases.

Bolyai János 1823-ban ezeket a sorokat írta Temesvárról édesapjának: "A feltételem már megvan, áll, hogy mihelyt rendbe szedem, elkészítem, 's mód lesz , a parallelákról egy munkát adok ki;.Édes-Apám megesmeri; most többet nem szólhatok, tsak annyit, hogy A SEMMIBŐL EGY UJJ MÁS VILÁGOT TEREMTETTEM". Ezen levelet feltalálása után 1885-ben, a Matematikai és Természettudományi Értesítő német nyelvű változatában (Ein Brief Johann Bolyai s v. Jahre 1823 in Bezug auf nichteuklidischen Geometrie), majd 1887-ben, ugyanennek a folyóiratnak a magyar nyelvű kiadásában Szily Kálmán mutatta be.

A Bolyai előtti geometria, mely Euklidesz nevéhez fűződik, öt feltevésből (posztulátum) és néhány "alapigazságból" építkezik, Euklidesz ezekből vezetett le minden egyéb állítást (Euklidesz: Elemek). Alapfeltevései között van egy, amely az V. posztulátum (vagy XI. axióma néven szerepel), amelyegyáltalán nem annyira nyilvánvaló, mint a többi. Ez síkra vonatkoztatva, így mondható ki: ha a P pont nincs az e egyenesen, akkor a P ponton egyetlen e-vel párhuzamos (e-t nem metsző) egyenes halad keresztül. (Más megfogalmazásban: ha két metsző egyenest egy harmadik metsz, akkor e két egyenes a metsző egyenesnek azon az oldalán metszi egymást, amelyiken a belső szögek összege kisebb két derékszögnél.)

Az V. posztulátum már megfogalmazásának bonyolultságát tekintve is kirí a többi közül. Több matematikus is gondolt arra, hogy az V. posztulátum talán nem is "alapigazság" hanem tétel, azaz a többi axióma következménye.

Próbálkoztak az V. posztulátum bizonyításával a többi axióma alapján. Bolyai János indirekt módon próbálta igazolni az állítást: feltette, hogy az V. posztulátum hamis, és azt remélte, hogy ebből valamilyen ellentmondásra bukkan, ami azt igazolná, hogy feltevése helytelen, vagyis az V. posztulátum állítása mégiscsak a többi feltevés következménye. Bolyai kereste a "hibát", de nem találta!

Rájött, hogy a vitatott V. posztulátum elhagyásával a megmaradó axiómákból felépíthető egy olyan geometriai rendszer, amely egy "új, más világ" lehetőségét is felöleli, de magába foglalja az euklideszi geometriát is, de egy másik nemeuklideszi geometriát is tartalmaz.

Ezt az új euklideszi és nemeuklideszi geometriát taglaló geometriai rendszert nevezte el Bolyai János ABSZOLÚT GEOMERIÁNAK. Bár édesapjának 1823-ban írta levelét, s akkor már lényegében kidolgozta ezt az új geometriát, munkája csak később jelent meg apja "TENTAMEN" című könyve függelékeként; APPENDIX címen. Ez a kidolgozás tömörsége és teljes újszerűsége miatt csak jóval később, Bolyai halála után talált nagyobb visszhangra a matematikusok körében.

Az V. posztulátum tagadását tartalmazó Bolyai-féle (hiperbolikus) geometria (relativ) ellentmondás mentességét Felix Klein bizonyította azáltal, hogy konstrukciójával (Klein-modell) megmutatta, hogy ha a hiperbolikus geometria tartalmaz ellentmondást, akkor az euklideszi is.

Ma a modern tudomány számos olyan geometriai rendszert ismer, amely eltér a klasszikus euklideszi geometriától (tehát nem euklideszi).

Az itt ismertetendő geometriákra Felix Klein hívta fel a figyelmet 1871-ben, s ebben az angol Arthur Cayley valamivel előbbi kutatásaira támaszkodott, ezért e rendszerekre a szakirodalomban előforduló cayley-klein geometriák elnevezést fogjuk használni.

A kilenc cayley-klein féle síkgeometria viszonyait a következő táblázat alapján tanulmányozhatjuk

	elliptikus	Euklideszi	hiperbolikus
Riemann-féle	elliptikus	Euklideszi	hiperbolikus
euklideszi	antieuklideszi	Galilei	Antipszeudó-euklideszi
Bolyai-féle	antihiperbolikus	Pszeudo-euklideszi	bihiperbolikus

A háromszög metrikus viszonyai (cosinus tételek):

	R	E	B-L
R	$\cos a = \cos(b)\cos(c)$ $+\sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$	$a^2 = b^2 + c^2$ $-2bc\cos\alpha$	$cha = ch(b)ch(c)$ $-sh(b)sh(c)\cos\alpha$
E	$a = b + c$	$a = b + c$	$a = b + c$
B-L	$\cos a = \cos(b)\cos(c)$ $+\sin(b)\sin(c)ch\alpha$	$a^2 = b^2 + c^2$ $-2(bc)ch\alpha$	$cha = ch(b)ch(c)$ $-sh(b)sh(c)ch\alpha$

Egy adott ponton átmenő és egy egyenest nem metsző egyenesek száma:

	R	E	B-L
R	0	1	∞
E	0	1	∞
B-L	0	1	∞

Egy egyenes azon pontjainak száma, amelyek nem köthetők össze egy adott ponttal:

	R	E	B-L
R	0	0	0
E	1	1	1
B-L	∞	∞	∞

Kiterjesztett Bolyai geometria Cosinus tételének speciális esetei:

Elliptikus (Riemann geometria) cosinus tétele
Eukideszi geometria cosinus tétele
Hiperbólikus geometria cosinus tétele

Azt mondjuk hogy $\langle a,b,c\rangle$ háromszögben az a-val szemben $\widetilde{\alpha}$,b-vel szemben $\widetilde{\beta}$, c-vel szemben $\widetilde{\gamma}$ található.

Definició:

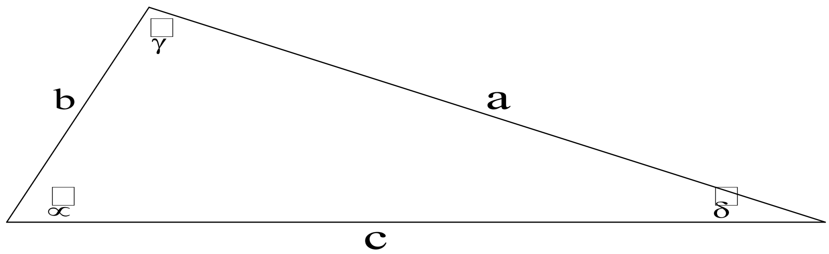
Cosinus Tétel:

Ha $\exists\rho$, hogy $a^2 = \dfrac{b^2 - 2bc\rho + c^2}{1 - 2bc\rho + c^2b^2}$ ahol $|\rho| < 1$ és $c \neq 1$; $b \neq 1$ akkor léteznek és egyértelműen léteznek a $0 \leq \widetilde{\alpha};\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};$ szögek úgy, hogy

$$a^2 = \frac{b^2 - 2bc\cos\widetilde{\alpha} + c^2}{1 - 2bc\cos\widetilde{\alpha} + c^2b^2};$$

$$b^2 = \frac{a^2 - 2ac\cos\widetilde{\beta} + c^2}{1 - 2ac\cos\widetilde{\beta} + c^2a^2};$$

$$c^2 = \frac{a^2 - 2ab\cos\widetilde{\gamma} + b^2}{1 - 2ab\cos\widetilde{\gamma} + a^2b^2};$$



Speciális esetként az euklideszi geometria cosinus tételét adja ha

$bc << 1$; $ac << 1$ és $ab << 1$ akkor

$$a^2 \approx b^2 - 2bc * \cos\widetilde{\alpha} + c^2$$

Speciális esetként a Bolyai-Lobacsevszkij geometria cosinus tételét adja:

$$a^2 = \frac{b^2 - 2bc\cos\widetilde{\alpha} + c^2}{1 - 2bc\cos\widetilde{\alpha} + c^2b^2};$$

ha $b < 1$ és $c < 1$ akkor található olyan $\widetilde{\alpha}$ szög:

$$\cos\widetilde{\alpha} := \cos\alpha + \frac{1}{2}cb\sin^2\alpha,$$

akkor: $$a^2 = \frac{b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2 - b^2c^2\sin^2\alpha}{1 - 2bc\cos\alpha + c^2b^2 - b^2c^2\sin^2\alpha};$$

legyen a is kisebb mint egy akkor az egyenletet átírhatjuk:

$$\sqrt{1-a^2} = \frac{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}}{1-bc\cos\alpha}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{1-bc\cos\alpha}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}}$$

Pszeudó euklideszi metrikájú térben megtehető:

$$ch(a') = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \quad ch(b') = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \quad ch(c') = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}},$$

$$sh(b') = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \quad sh(c') = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}},$$

$$ch(a') = ch(b')ch(c') - sh(b')sh(c')\cos\alpha$$

Speciális esetként a Riemann (elliptikus) geometria cosinus tételét adja:

$$a^2 = \frac{b^2 - 2bc\cos\widetilde{\alpha} + c^2}{1 - 2bc\cos\widetilde{\alpha} + c^2b^2};$$

Ha $b<1$ és $c<1$ akkor található olyan $\widetilde{\alpha}$ szög:

$$\cos\widetilde{\alpha} := \cos\alpha + \frac{1}{2}cb\sin^2\alpha,$$

Akkor: $$a^2 = \frac{b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2 - b^2c^2\sin^2\alpha}{1 - 2bc\cos\alpha + c^2b^2 - b^2c^2\sin^2\alpha};$$

Legyen a is kisebb, mint egy akkor az egyenletet átírhatjuk:

$$\sqrt{1-a^2} = \frac{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}}{1-bc\cos\alpha}$$

$$\sqrt{1-a^2} - bc\sqrt{1-a^2}\cos\alpha = \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}$$

$$a := \sin(a')$$
$$b := \sin(b')$$
$$c := \sin(c')$$

$$\cos\alpha` := \sqrt{1-a^2}\cos\alpha$$

$$\cos a` - \sin b` \sin c` \cos\alpha'` = \cos b` \cos c`$$
$$\cos a` = \cos b` \cos c + \sin b` \sin c` \cos\alpha'`$$

Sinus Tétel:

$$\frac{(1-a^2)^2 \sin^2(\tilde{\alpha})}{a^2} = \frac{(1-b^2)^2 \sin^2(\tilde{\beta})}{b^2} = \frac{(1-c^2)^2 \sin^2(\tilde{\gamma})}{c^2}$$

$\langle A, B, C\rangle$ -ben

$$\frac{(1-A^2)\ \sin\ (\tilde{\alpha})}{A} = \frac{(1-B^2)\ \sin\ (\tilde{\beta})}{B} = \frac{(1-C^2)\ \sin\ (\tilde{\gamma})}{C}$$

alakot ölti.

Felhasznált irodalom

1. Bolyai Farkas: Tentamen. 1832
2. Bolyai János: Appendix. 1832
3. Bolyai emlékkönyv. Vince Kiadó, Budapest. 2004
4. Euklidesz: Elemek. ókor
5. Szily Kálmán: Matematikai és Természettudományi Értesítő, 1885