

PRO PATRIA AD MORTEM

# Mechanika I.

## Statika



TÓTH BENCE

diológ Campus

Tóth Bence  
MECHANIKA I.

PRO PATRIA AD MORTEM

Tóth Bence

# MECHANIKA I.

Statika

DIALÓG CAMPUS KIADÓ ❖ BUDAPEST, 2019

Szakmai lektor  
Dr. Nagy Imre

© Dialóg Campus Kiadó, 2019

© A szerző, 2019

A forrásmegjelölés nélküli ábrák a szerző saját szerkesztései.

A mű szerzői jogilag védett. Minden jog, így különösen a sokszorosítás, terjesztés és fordítás joga fenntartva. A mű a kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül részeiben sem reprodukálható, elektronikus rendszerek felhasználásával nem dolgozható fel, azokban nem tárolható, azokkal nem sokszorosítható és nem terjeszthető.

# Tartalom

Előszó . . . . .	9
1. Fizikai mennyiségek . . . . .	11
1.1. Az SI-mértékegységrendszer . . . . .	11
1.1.1. A fizikai mennyiségek felépítése . . . . .	12
1.1.2. Alapmértékegységek . . . . .	13
1.1.3. Származtatott mértékegységek. . . . .	13
1.1.4. Prefixumok . . . . .	14
1.2. Skalármennyiségek . . . . .	15
1.3. Vektormennyiségek . . . . .	16
1.3.1. Vektorok skaláris szorzata . . . . .	17
1.3.2. Vektor merőleges vetülete . . . . .	17
1.3.3. Vektor koordinátareprezentációja . . . . .	18
1.3.4. Vektorok vektoriális szorzata. . . . .	19
1.3.5. Vektorok felbontása . . . . .	21
2. A forgatónyomaték . . . . .	23
3. Síkbeli erőrendszerek . . . . .	27
3.1. Koncentrált erők. . . . .	27
3.2. Erőpár. . . . .	27
3.3. Erőrendszerek egyensúlya. . . . .	30
3.3.1. A nyomatéki tétel . . . . .	31
3.3.2. Erő felbontása párhuzamos erőkre. . . . .	33
3.3.3. A Ritter-módszer . . . . .	34
3.3.4. Általános síkbeli erőrendszer eredőjének számítása . . . . .	36
3.4. Erőáthelyezés . . . . .	38

3.5. Megoszló erőrendszer . . . . .	40
4. A statika alaptételei . . . . .	43
4.1. A statika I. alaptétele . . . . .	44
4.2. A statika II. alaptétele . . . . .	44
4.3. A statika III. alaptétele. . . . .	44
4.4. A statika IV. alaptétele. . . . .	45
4.5. A statika V. alaptétele . . . . .	46
5. A súlypont. . . . .	47
5.1. Az elsőrendű vagy statikai nyomaték . . . . .	47
5.1.1. Test pontra vett elsőrendű nyomatéka. . . . .	47
5.1.2. Test síkra vett elsőrendű nyomatéka. . . . .	48
5.1.3. Tömeg pontra vett elsőrendű nyomatéka . . . . .	48
5.1.4. Tömeg síkra vett elsőrendű nyomatéka . . . . .	48
5.1.5. Áttérés másik koordináta-rendszerre . . . . .	49
5.1.6. Ívdarab pontra vett elsőrendű nyomatéka. . . . .	50
5.1.7. Ívdarab tengelyre vett elsőrendű nyomatéka. . . . .	50
5.1.8. Síkidom pontra vett elsőrendű nyomatéka . . . . .	50
5.1.9. Síkidom tengelyre vett elsőrendű nyomatéka. . . . .	51
5.2. A súlypont számítása. . . . .	51
5.3. Egyszerű síkidomok súlypontja. . . . .	55
5.3.1. Kör, paralelogramma és háromszög súlypontja . . . . .	55
5.3.2. Körív súlypontja. . . . .	56
5.3.3. Kőrcikk súlypontja . . . . .	57
5.4. Összetett síkidomok elsőrendű nyomatéka és súlypontja. . . . .	58
5.4.1. Áttérés integrálásról szorzatösszegre. . . . .	58
5.4.2. A „negatív terület” . . . . .	59
5.5. Stabilitás. . . . .	60
6. Kényszerek . . . . .	63
6.1. Szabadsági fok . . . . .	63
6.2. A kényszerek fajtái . . . . .	64

---

6.2.1. Támasz . . . . .	64
6.2.2. Görgő . . . . .	65
6.2.3. Csukló. . . . .	66
6.2.4. Befogás. . . . .	67
6.2.5. Rúd . . . . .	67
6.2.6. Kötél . . . . .	67
6.3. Statikai határozottság és határozatlanság . . . . .	68
6.4. Stabilitás és labilitás . . . . .	68
7. Kéttámaszú tartók. . . . .	71
7.1. Koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartó. . . . .	73
7.2. Igénybevételi ábrák . . . . .	74
7.2.1. A nyomóerőábra . . . . .	75
7.2.2. A nyíróerőábra . . . . .	77
7.2.3. A hajlítónyomatéki ábra . . . . .	78
7.2.4. A Zsuravszkij-tétel . . . . .	80
7.2.5. A veszélyes keresztmetszet . . . . .	82
7.3. Megoszló erőrendszerrel terhelt kéttámaszú tartó. . . . .	84
7.3.1. Megoszló erőrendszer nyíróereje . . . . .	84
7.3.2. Megoszló erőrendszer hajlítónyomatéka . . . . .	85
7.4. Vegyes terhelésű kéttámaszú tartó . . . . .	86
7.4.1. Vegyes terhelésű kéttámaszú tartóra ható nyíróerők . . . . .	86
7.4.2. Vegyes terhelésű kéttámaszú tartóra ható hajlítónyomatékok . . . . .	88
7.5. Koncentrált forgatónyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó . . . . .	90
8. Egyik végén befogott tartó . . . . .	93
9. Síkbeli összetett szerkezetek . . . . .	97
9.1. Rácsos szerkezetek . . . . .	97
9.1.1. A csomóponti módszer . . . . .	100
9.1.2. Az átmetező módszer . . . . .	105
9.2. Csuklós szerkezetek. . . . .	108



---

9.2.1. Háromcsuklós szerkezet (bakállvány) . . . . .	108
9.2.2. Gerber-tartó . . . . .	110
9.2.3. Rúdlánc . . . . .	113
9.3. Kötél . . . . .	117
9.3.1. Saját súlya alatt meghajló köté . . . . .	117
9.3.2. Megoszló erőrendszerrel terhelt köté . . . . .	122
10. Súrlódás . . . . .	123
10.1. Tapadási súrlódás . . . . .	123
10.1.1. Párhuzamos húzás vízszintes felületen . . . . .	124
10.1.2. Párhuzamos húzás döntött felületen . . . . .	124
10.1.3. Ferde húzás döntött felületen . . . . .	126
10.2. Súrlódási kúp . . . . .	130
10.3. Önzárás . . . . .	131
10.4. Kötélsúrlódás . . . . .	133
10.5. Gördülő ellenállás . . . . .	136
Angol kifejezések gyűjteménye . . . . .	139
Magyar–angol . . . . .	139
Angol–magyar . . . . .	141
Irodalom . . . . .	143

## Előszó

Több mint tíz év telt el azóta, hogy a Nemzeti Közsolgálati Egyetemen, pontosabban egyik elődintézményében, a Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetemen egyetemi jegyzet készült a műszaki mechanika témakörében, azon belül is statikából.

Ez idő alatt nemcsak az ebben a témakörben tárgyalt jelenségeknek, műszaki megoldásoknak jelentek meg újabb alkalmazási területei, hanem az egyetemi képzésben is több változás történt. Mivel új szakokon új tárgyak oktatása folyik, a változó tantárgyi követelményekhez az oktatási anyagoknak is igazodniuk kell. Ennek a célnak kíván megfelelni a jegyzet, amely – célirányosan – az NKE Hadtudományi és Honvédtisztképző Karon a katonai logisztika BSc szakon oktatott *Mechanika I.* kurzus tananyagát foglalja magában. Az itt tárgyalt ismeretek alapos, készségszintű elsajátítása elengedhetetlen nemcsak a ráépülő *Mechanika II.* kurzus anyagának megértéséhez és alkalmazásához, hanem a későbbiekben a szakmai tárgyakhoz is. A megközelítés elméleti jellegű, az itt levezetett összefüggések alkalmazását külön példatár segíti.

A jegyzet feltételezi a differenciál- és integrálszámítás alapvető ismeretét, a vektoralgebra szükséges összefüggéseit azonban bemutatja. A leglényegesebb angol szakkifejezések nemcsak első szövegközi előfordulásukkor jelennek meg, hanem összegyűjtve is megtalálhatók a jegyzet végén.

Budapest, 2019. 03. 17.

*Dr. Tóth Bence*



# 1. Fizikai mennyiségek

A fizikai mennyiségeknek három alapvető típusa létezik: skalár-, vektor- és tenzormennyiségek. Mivel ez utóbbiakra csak a szilárdságtan tárgyalásakor lesz szükség, ebben a fejezetben csak az első kettőről adunk rövid összefoglalást. Először azonban definiálni kell, pontosan mit is értünk fizikai mennyiség alatt.

## 1.1. Az SI-mértékegységrendszer

A mérés mindig összehasonlítással, egy referenciához való viszonyítással történik. Ez az alapja az olyan ősi mértékegységeknek is, mint a hüvelyk, a láb vagy a yard, amelyek a mérést végző embernél mindig „kéznél levő” segéd-eszközök voltak: hüvelykujja, talpa, kinyújtott karja, amelyekhez a mérendő hosszúságot viszonyította. Azonban ezek mérete minden embernek más és más, ezért felmerült az igény a sztenderdizálásra, amelynek egyik első lépését I. Henrik angol király tette meg, miszerint egy yard az ő orrának hegyétől a kinyújtott karja végéig terjedő hossz.

A manapság általánosan használt mértékegységrendszer alapjait a francia forradalom teremtette meg: a Nemzetgyűlés a Francia Tudományos Akadémia javaslatára kidolgoztatott egy decimális alapú mértékegységrendszert. A méter, bár definíció szerint a Párizson áthaladó délkör  $1 / 40\,000$ -ed része, a valóságban egy sárgaréz rúd volt, amelyet a Konvent 1795. augusztus 1-jén fogadott el. Egy másik alapegység, a kilogramm neve eredetileg a gravitációra utaló *grave* volt, amelyet azonban megváltoztattak, mivel ez a szó gróft is jelentett franciául, és az, hogy az egyik mértékegység „nemesebb” legyen a többinél, összeegyeztethetetlen volt a forradalmi eszmékkel. Az egység új neve a *kilo*- előtaggal ellátott *gramm* lett. Az 1799-ben elfogadott definíció szerint ennyi  $1\text{ dm}^3 + 4^\circ\text{C}$ -os víz tömege.

1899-ben az 1. Általános Súly- és Mértékügyi Konferencián Párizsban egy  $\text{Pt}_{90}\text{Ir}_{10}$  összetételű ötvözetből álló rúd hosszát és egy ugyanilyen ötvözetből készített henger tömegét fogadták el a korábbi meghatározások helyett

alapegységnek. Magát az SI-mértékegységrendszert a 11. Általános Súly- és Mértékügyi Konferencia fogadta el 1960-ban. Azóta elnevezés- és jelölésbeli korrekciók mellett két lényeges változás történt: a méter definíciója ma már a fénysebességhez van kötve. Eszerint egy méter az a távolság, amelyet a fény vákuumban  $1 / 299\,792\,458$  másodperc alatt megtesz. Ezzel a fénysebesség egy rögzített állandóvá vált. Hasonlóan a kilogramm definíciójának fizikai állandókhoz való kötése is megtörtént egy kvantummechanikai konstans, az úgynevezett Planck-állandó értékének definiálásával. Így 2019. május 20. óta a tömeg alapegységét ezen konstans, a másodperc és a méter segítségével definiáljuk.

Magyarországon 1980. január 1-jétől kötelező az SI-rendszer használata a 8/1976. (IV. 27.) MT rendelet, illetve a 127/1991. (X. 9.) Korm. rendelet 1. számú melléklete (megállapította a 182/2009. (IX. 10.) Korm. rendelet 24. § (6), 1. számú melléklete, hatályos: 2009. X. 1-től) alapján.

### 1.1.1. A fizikai mennyiségek felépítése

Az egyes fizikai mennyiségek méréséhez tehát egységeket kell választani, legyen bár az az uralkodó fizikai valója vagy a valós fizika egy állandója. Ezután minden mérendőt ehhez viszonyítunk.

Ha egy kötéltre kétszer fér rá a méterrúd (legyen bár maga a „méter” definíciója egy absztrakt koncepció), akkor a kötéel hossza két méter. Ha egy ember magassága a méterrúd 1,73-szorosa, akkor a magassága 1,73 m. A mennyiségek tehát két részből állak: egy mértékegységből, amelyhez viszonyítunk, és egy mérőszámból, amely azt mutatja meg, hogy amit mérünk, az az etalonnak hányszorosa.

Mennyiségeink felépítése tehát: mérőszám + mértékegység.

Ebből következően ugyanannak a mérendő objektumnak más lesz a mérőszáma, ha más egységben mérjük. Egy (osztrák) rőf például 2,47 láb vagy 30,71 hüvelyk, ami 0,78 méterrel egyenlő. De még egyazon mértékegység is országonként más és más volt, sőt rőfből csak Magyarországon legalább ötféle létezett. A „méter” vagy a „kilogramm” fogalom alatt azonban mindenhol ugyanazt értik, még az SI-rendszert be nem vezetett USA-ban is, mivel az ott használatos yard definíció szerint pontosan 0,9144 méter, és a font (az úgynevezett *Avoirdupois pound*) pontosan 0,45359237 kilogramm. A többi távolság- és tömegegység is ezek többszöröseiként van meghatározva.

### 1.1.2. Alapmértékegységek

Az SI-rendszer hét alpmennyiségre épül, amelyek kombinációjával bármely fizikai mennyiség mértékegysége kifejezhető. Ezek a következők:

mennyiség		mértékegységének	
neve	jele	neve	jele
hosszúság	$\ell$	méter	m
tömeg	$m$	kilogramm	kg
idő	$t$	másodperc	s
áramerősség	$I$	amper	A
hőmérséklet	$T$	kelvin	K
anyagmennyiség	$n$	mól	mol
fényerősség	$I_v$	kandela	cd

Ezek között ugyanakkor csak három teljesen független van: a kilogramm, a másodperc és a kelvin, mivel a méter definíciója felhasználja a másodpercet (a fénysebességen keresztül, ahogy ezt már korábban láttuk), az amperé a másodpercet, a métert és a kilogrammot, a mólé a kilogrammot és a kandelát a másodpercet, a métert és a kilogrammot.

Az újabb mértékegységeknek szokás híres fizikusok nevét adni. Így lett az áramerősség mértékegysége amper André-Marie Ampère, francia fizikus és matematikus előtt tisztelegve, vagy a kelvin William Thomson, Kelvin 1. bárója után elnevezve.

Az alpmennyiségek mellett létezik még két, úgynevezett kiegészítő mennyiség:

mennyiség	mértékegységének	
neve	neve	jele
síkszög	radián	rad
térszög	szteradián	sr

### 1.1.3. Származtatott mértékegységek

Az alpmértékegységekkel tehát minden más, az adott objektumot jellemző mennyiség mértékegysége kifejezhető. Például annak a mértékegysége, hogy egy hullám másodpercenként hányat rezeg, azaz hány periódust tesz meg egységnyi idő alatt (amely mennyiséget frekvenciának nevezünk), az 1/s.

A gyakorlatban azonban ennek (és sok másiknak) az egyszerűség kedvéért szintén nevet adtak. A frekvencia mértékegységét hertznek nevezzük, amely ugyanúgy 1/s-ot jelent, a két mértékegység szinonim, mégis a hertz az általánosan használt. A bonyolultabbak esetében ez érthető is a jelölés könnyebbsége miatt. Azonban fontos tudni, hogy mindegyik származtatott mennyiség egyértelműen felírható a hét alpmértékegység segítségével is, például 1 tesla ugyanazt jelenti, mint ha azt íránk, hogy  $1 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$ . Ezen mértékegységek is szinte kivétel nélkül híres tudósokról lettek elnevezve:

mennyiség		mértékegységének		kifejezése alpmértékegységekkel	
neve	jele	neve	jele		
frekvencia	$\nu$	hertz	Hz	$\text{s}^{-1}$	
erő	<b>F</b>	newton	N	$\text{kg m s}^{-2}$	
nyomás	$p$	pascal	Pa	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$	$= \text{N m}^{-2}$
energia, munka	$E, W$	joule	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	$= \text{N m}$
teljesítmény	$P$	watt	W	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$	$= \text{J s}^{-1}$
elektromos töltés	$Q$	coulomb	C	A s	
elektromos feszültség	$U$	volt	V	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}$	$= \text{J C}^{-1}$
elektromos ellenállás	$R$	ohm	$\Omega$	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-2}$	$= \text{V A}^{-1}$
elektromos vezetőképesség	$\sigma$	siemens	S	$\text{s}^3 \text{A}^2 \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1}$	$= \text{A V}^{-1}$
kapacitás	$C$	farad	F	$\text{s}^4 \text{A}^2 \text{m}^{-2} \text{kg}^{-1}$	$= \text{C V}^{-1}$
mágneses indukció	<b>B</b>	tesla	T	$\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$	$= \text{V s m}^{-2}$
mágneses fluxus	<b><math>\Phi</math></b>	weber	Wb	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$	$= \text{V s}$
induktivitás	$L$	henry	H	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-2}$	$= \text{V s A}^{-1}$
fényáram	$\Phi_v$	lumen	lm	cd sr	
megvilágítás	$E_v$	lux	lx	$\text{cd sr m}^2$	
aktivitás	$A$	becquerel	Bq	$\text{s}^{-1}$	
elnyelt sugárdózis	$D$	gray	Gy	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$	$= \text{J kg}^{-1}$
dózisegyenérték	$H$	sievert	Sv	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$	$= \text{J kg}^{-1}$
katalitikus aktivitás	$U$	katal	kat	$\text{mol s}^{-1}$	

#### 1.1.4. Prefixumok

Általában arra szoktunk törekedni, hogy a mennyiségeink mérőszámai 0,1 és 10 000 közé essenek. Sok esetben ez azonban nem lehetséges, ezért vezették

be az úgynevezett prefixumokat, amelyek jelét a mértékegységek jele elé, azzal egybeírva azok többszöröseit fejezhetjük ki. Egy kilométer (1 km) tehát egyszer ezer méter. Az SI-prefixumok a következők (gör.: a görög, lat.: a latin, sp.: a spanyol, dán: a dán nyelvből ered):

jel	név	szorzó	etimológia
Y	yotta-	$10^{24}$	οκτώ, <i>októ</i> , gör. „nyolc” / octo, lat. „nyolc” (1000 <sup>8</sup> )
Z	zetta-	$10^{21}$	ζήτα, <i>dzéta</i> , gör. „hét” (1000 <sup>7</sup> )
E	exa-	$10^{18}$	ἕξά, <i>hexa</i> , gör. „hat” (1000 <sup>6</sup> )
P	peta-	$10^{15}$	πέντε, <i>pénte</i> , gör. „öt” (1000 <sup>5</sup> )
T	tera-	$10^{12}$	τέρας, <i>térász</i> , gör. „szörny”
G	giga-	$10^9$	γίγας, <i>gígász</i> , gör. „óriás”
M	mega-	$10^6$	μέγας, <i>mégász</i> , gör. „nagy”
k	kilo-	$10^3$	χίλιοι, <i>khílioi</i> , gör. „ezer”
h	hekto-	$10^2$	ἑκατόν, <i>hekatón</i> , gör. „száz”
da	deka-	$10^1$	δέκα, <i>déka</i> , gör. „tíz”
d	deci-	$10^{-1}$	decimus, lat. „tized”
c	centi-	$10^{-2}$	centum, lat. „száz”
m	milli-	$10^{-3}$	mille, lat. „ezer”
μ	mikro-	$10^{-6}$	μικρός, <i>mikrósz</i> , gör. „kicsi”
n	nano-	$10^{-9}$	νάνος, <i>nanosz</i> , gör. „törpe” / nanus, lat. „törpe”
p	piko-	$10^{-12}$	pico, sp. „kevés”, „csúcs”
f	femto-	$10^{-15}$	femten, dán „tizenöt”
a	atto-	$10^{-18}$	atten, dán „tizennyolc”
z	zepto-	$10^{-21}$	septem, lat. „hét” (1000 <sup>-7</sup> )
y	yocto-	$10^{-24}$	οκτώ, <i>októ</i> , gör. „nyolc” / octo, lat. „nyolc” (1000 <sup>-8</sup> )

A *tera-* prefixum neve tehát görög eredetű, nincs köze a latin *terra*, „föld” szóhoz.

A *hekto-*, *deka-*, *deci-*, *centi-* prefixum csak meghatározott mennyiségek előtt használható, a többi bármelyik előtt.

## 1.2. Skalármennyiségek

Az 1.1.3. alfejezet felsorolásában a származtatott mennyiségek jele néhol dőlt, néhol félkövér betű volt. Ezzel különböztetjük ugyanis meg, hogy



az adott mennyiség skaláris vagy vektoriális. A skalárokat jelöljük dőlt, a vektorokat félkövér betűkkel.

Skalároknak azokat a fizikai mennyiségeket nevezzük, amelyeknek csak nagysága van, ami nem függ a koordináta-rendszer megválasztásától. Jelüket tehát dőlt betűvel (kézírásban normál betűvel) írjuk. Ilyenek a tömeg, a hosszúság, az idő, a hőmérséklet, az elektromos töltés vagy a fényerősség. Ezeket a mennyiségeket pusztán mérőszámuk és mértékegységük segítségével egyértelműen megadhatjuk, pl.  $t = 42$  s. Két azonos mértékegységű skaláris mennyiség tetszőlegesen összeadható vagy kivonható egymásból, pl.  $42$  s +  $137$  s =  $179$  s.

### 1.3. Vektormennyiségek

A vektor egy irányított szakasz. Ezért az olyan fizikai mennyiségeket, amelyeknek nem csak nagysága, hanem iránya is van, célszerű egy vektorral jellemezni. Ezeket nevezzük vektoriális mennyiségeknek. Jelüket nyomtatásban félkövérrel szedjük, kézírásban aláhúzással vagy felülvonással jelöljük:  $\underline{v}$  vagy  $\vec{v}$ . Ilyen például a sebesség (jele  $\underline{v}$ , mértékegysége m/s), a gyorsulás (jele  $\underline{a}$ , mértékegysége m/s<sup>2</sup>), az erő, valamint például az elektromos és a mágneses térerősség. Ilyen mennyiség még a helyvektor, amely a koordináta-rendszer origójából az adott pontba mutat. Jele  $\underline{r}$ , mértékegysége méter.

Vektoriális mennyiségeket összeadni csak az irányukra való tekintettel lehet, a vektorok összeadási szabályai szerint.

Vektor hatásvonalán (*line of action*) azt az egyenest értjük, amely illeszkedik a vektorra. A vektor a hatásvonala mentén szabadon eltolható.

Vektor abszolút értékén (*norm*) vagy nagyságán az adott vektornak egy koordináta-rendszerben vett hosszát értjük, ezért ez mindig egy nemnegatív szám. Jelölése:  $|\underline{v}|$ , vagy egyszerűbben:  $v$ , ahogy egy skalármennyiséget is jelölnénk. Azt mutatja meg, hogy a vektor hossza hányszorosa a koordináta-rendszer egységének.

Egy  $\underline{v}$  vektornak egy  $\lambda$  skalárral való szorzatán azt a vektort értjük, amelynek hatásvonala megegyezik az eredeti vektoréval, abszolút értéke pedig annak  $\lambda$ -szorosa:  $|\lambda \underline{v}| = \lambda |\underline{v}|$ .

A  $|\underline{v}| = 0$  vektort nullvektornak nevezzük, iránya tetszőleges. Jele:  $\mathbf{0}$ .

### 1.3.1. Vektorok skaláris szorzata

Két vektor skaláris szorzata (*dot product*) az a valós szám, amely a két vektor abszolút értékének és a két vektor által közbezárt szög koszinuszának szorzata. A két vektorból így egy számot, egy skalárt állítottunk elő, amelynek értéke függ a vektorok abszolút értékétől és hatásvonalaik egymáshoz viszonyított helyzetétől. Mivel két merőleges vektor által közbezárt szög  $\pi/2$  és  $\cos(\pi/2) = 0$ , ezért két, egymásra merőleges vektor skaláris szorzata zérus, míg a  $\cos(0) = 1$  érték miatt párhuzamos vektorok skaláris szorzata az abszolút értékeik szorzata.

Ha a két vektor  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$ , a közbezárt szög pedig  $\gamma$ , akkor a skaláris szorzat:

$$(1) \quad \mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma$$

A skaláris szorzatban a tényezők sorrendje felcserélhető:  $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ .

Ha az (1)-ben a két vektort egyenlővé tesszük,  $\gamma = 0$  lesz, hiszen egy vektor önmagával párhuzamos, így  $\cos(\gamma)$  is 1 lesz. Ez alapján ki tudjuk fejezni a vektor abszolút értékét is a skaláris szorzat segítségével: ehhez képeznünk kell a vektor önmagával vett skaláris szorzatának a négyzetgyökét:

$$(2) \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\mathbf{v}}$$

### 1.3.2. Vektor merőleges vetülete

Egy vektor adott tengelyre vett merőleges vetületén (*orthogonal projection*) egy skaláris szorzat eredményét értjük.

Első lépésben a vektort eltoljuk önmagával párhuzamosan úgy, hogy kezdőpontja a tengelyre essen, és a vektor végpontján át merőlegest húzunk a tengelyre. Az eredeti vektor kezdőpontjából a merőleges és a tengely metszéspontjába mutató vektor lesz a skaláris szorzat egyik tényezője, jelöljük ezt a vektort  $\mathbf{v}_e$ -vel.

A skaláris szorzat másik tényezője a tengely irányába mutató egységvektor, amelyet jelölünk  $\mathbf{e}$ -vel. Ennek tulajdonsága, hogy  $|\mathbf{e}| = 1$ . Megkapható bármilyen, a tengely irányába eső  $\mathbf{a}$  vektor segítségével:

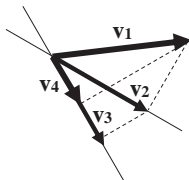
$$(3) \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

A  $\mathbf{v}$  vektornak az  $\mathbf{e}$  egységvektorú tengely irányába eső merőleges vetülete:

$$(4) \quad \mathbf{v}_e = (\mathbf{v}\mathbf{e})\mathbf{e}$$

Egy  $xyz$  derékszögű koordináta-rendszerben az  $x$ ,  $y$  és  $z$  irányú egységvektorokat legtöbbször  $\mathbf{i}$ -vel,  $\mathbf{j}$ -vel és  $\mathbf{k}$ -val szoktuk jelölni, ebben a sorrendben.

Vigyázat: ha egy  $\mathbf{v}_1$  vektor merőleges vetületét, a  $\mathbf{v}_2$  vektort (1. ábra) egy másik tengelyre vetítünk merőlegesen, azzal egy olyan  $\mathbf{v}_3$  vektort kapunk, amely (általában) már nem egyezik meg az eredeti vektor második tengelyre vett  $\mathbf{v}_4$  merőleges vetületével.



1. ábra

### 1.3.3. Vektor koordinátareprezentációja

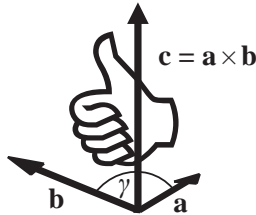
Háromdimenziós vektorokat egy adott koordináta-rendszerben egy számhármassal jellemezhetünk. Ha a koordináta-rendszert párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy origója a vektor kezdőpontjával essen egybe, akkor a vektor három koordinátatengelyre vett merőleges vetületének és a tengelyirányú egységvektornak a skalárszorzatával egyértelműen reprezentálhatjuk azt az adott koordináta-rendszerben:  $\mathbf{v} = (v_x; v_y; v_z)$ . Természetesen másik koordináta-rendszerben ez a számhármás más lesz.

Egy vektor abszolút értékét meghatározhatjuk egy koordinátareprezentációja segítségével úgy, mint a koordináták négyzetösszegéből vont négyzetgyök (amely a Pitagorasz-tétel háromdimenziós alkalmazása):

$$(5) \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

### 1.3.4. Vektorok vektoriális szorzata

Két vektor vektoriális szorzata (*cross product*) az a vektor, amelynek abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és a két vektor által közbezárt szög szinuszának szorzata, iránya pedig merőleges a két eredeti vektorra úgy, hogy azokkal jobbsodrású rendszert alkot. Jelölése:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  (kimondva „a kereszt b”).



2. ábra

A jobbsodrású rendszert szemlélteti a 2. ábra: ha a két szorzandó vektort közös kezdőpontba toljuk el önmagukkal párhuzamosan, és az  $\mathbf{a}$  vektort (a rövidebbik úton, azaz  $\gamma \leq 180^\circ$ ) „beforgatjuk” az ujjainkkal a  $\mathbf{b}$  vektor irányába, akkor a hüvelykujjunk jelöli ki a jobbsodrású rendszer harmadik irányát. Az egymással  $\gamma$  szöget bezáró  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok vektoriális szorzatának abszolút értéke:

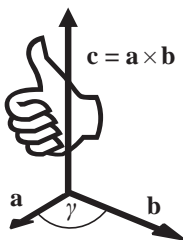
$$(6) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \gamma$$

Ha az  $\mathbf{a}$  vektort a hosszabbik úton „forgatnánk be” a  $\mathbf{b}$  vektor irányába, akkor a hüvelykujjunk, és vele az eredő vektor iránya ellentétesen, lefelé mutatna. Ezért tettük a definícióban a „rövidebbik út” kikötést. Azonban ez utóbbi ugyanazt jelentené, mintha a  $\mathbf{b}$  vektort „forgatnánk be” az  $\mathbf{a}$  vektor irányába a rövidebbik úton. Ekkor valóban az ellenkező irányba mutatna hüvelykujjunk, és vele az eredő vektor iránya is. Azaz a vektoriális szorzás nem felcserélhető, a szorzás sorrendjét megfordítva a szorzatvektor iránya ellentétes irányítottságúra vált:

$$(7) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$(8) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Ezzel szemben a koordináta-rendszer tükrözése esetén a vektoriális szorzat eredményeként kapott vektor iránya nem változik meg a tükrözés előttihez képest. Bár  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  iránya ellentétesre vált, nagyságuk és az általuk közrezárt szög nem változik, sem az irány, amelybe  $\mathbf{a}$  vektort forgatva a  $\mathbf{b}$  vektorral párhuzamos irányba hozható (3. ábra). Az ilyen tulajdonságú vektorokat axiálevektoroknak nevezzük.



3. ábra

A vektoriális szorzat komponensei egyszerűen kiszámíthatóak a szorzandók adott koordináta-rendszer-beli komponenseinek ismeretében egy formális determináns segítségével, ahol  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  és  $\mathbf{k}$  a koordináta-rendszer  $x$ ,  $y$  és  $z$  tengelyeinek irányába mutató egységvektorok, és  $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z)$  és  $\mathbf{b} = (b_x; b_y; b_z)$ :

$$(9) \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

A determináns kifejtése a következőképpen történik. A bal felső sarokban levő elemet ( $\mathbf{i}$ ) beszorozzuk a tőle eggyel és kettővel jobbra lefelé levő elemekkel ( $a_y$ -nal és  $b_z$ -vel), majd ebből kivonjuk az  $\mathbf{i}$  és a tőle eggyel és kettővel balra lefelé levő elemekkel való szorzatát. Amennyiben „kilépünk” oldalra a determinánsból, „visszajövünk” a másik oldalon, azaz jelen esetben a kivonandó szorzat  $\mathbf{i} a_z b_y$ . Ezt elvégezzük  $\mathbf{j}$ -re és  $\mathbf{k}$ -ra is:

$$(10) \quad \mathbf{c} = \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a determináns elemeit többször leírjuk egymás mellé, és a három  $\triangleright$  irányú szorzatot pozitív, a három  $\triangleleft$  irányú szorzatot negatív előjellel adjuk össze:

$$\begin{array}{cccccc}
 \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\
 a_x & a_y & a_z & a_x & a_y & a_z \\
 b_x & b_y & b_z & b_x & b_y & b_z
 \end{array}$$

$$(11) \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} a_y b_z + \mathbf{j} a_z b_x + \mathbf{k} a_x b_y - \mathbf{i} a_z b_y - \mathbf{j} a_x b_z - \mathbf{k} a_y b_x$$

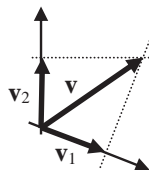
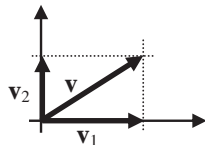
Az eredményt háromkomponensű sorvektor alakban írva:

$$(12) \quad \mathbf{c} = (a_y b_z - a_z b_y; a_z b_x - a_x b_z; a_x b_y - a_y b_x)$$

Mivel síkbeli rendszerekkel foglalkozunk, az ábrákat, és így a számolások során használt vektorokat is, a papír síkjába rajzoljuk. Ekkor két vektor vektoriális szorzata biztos, hogy a papír síkjára merőleges lesz, csak iránya lesz kifelé vagy befelé mutató. Ennek jelölésére a következő konvenciót használjuk: a papír síkjából kifelé mutató vektort  $\odot$  szimbólummal, a papír síkjába befelé mutató vektort pedig  $\otimes$  szimbólummal jelöljük. Ezen szimbólumok eredete a nyíl  $\Rightarrow$  stiláris ábrázolásában keresendő: amikor a nyíl „felénk”, a papír síkjából kifelé tart, akkor a nyílnak a hegyét látjuk:  $\odot$ , amikor a nyíl „távolodik tőlünk”, azaz „haladási iránya” a papír síkjába befelé mutat, akkor a végén levő tollakat látjuk:  $\otimes$ .

### 1.3.5. Vektorok felbontása

Gyakran előfordul, hogy egy feladat megoldásához célszerű egy vektort két komponensre felbontani. A legtöbbször az a cél, hogy egy másik vektorral párhuzamos vagy éppen arra merőleges vektort kapjunk, ezért általában egymásra merőleges komponensekre bontjuk fel az eredeti vektort, de a felbontás bármilyen (nullától különböző) hajlásszögű tengelyek esetében elvégezhető. A koordináta-rendszer (amelyben a komponenseket meg akarjuk határozni) origóját az eredeti vektor kezdőpontjába felvéve az eredeti vektor koordinátatengelyekre vett merőleges vetületeinek, mint skalároknak és az adott tengely irányú egységvektoroknak a szorzatai adják a keresett két vektort.



4. ábra

A 4. ábra esetében tehát: ha a két, koordinátatengely-irányú egységvektort  $\mathbf{e}_1$ -gyel és  $\mathbf{e}_2$ -vel jelöljük, a két keresett komponens,  $\mathbf{v}_1$  és  $\mathbf{v}_2$  a következőképpen áll elő:

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= v_1 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= v_2 \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

## 2. A forgatónyomaték

Az erő (*force*) olyan hatás, amely egy tömeggel (*mass*) rendelkező testet gyorsulásra (*acceleration*) készítet. Ez Newton II. törvénye:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Az erő és az általa okozott gyorsulás között lineáris összefüggés van, amelynek arányossági tényezője a tömeg. Amennyiben az erő hatásvonalát átmeny a test súlypontján, akkor az erő csak gyorsítani fogja a testet. Azonban ha az erő hatásvonalát nem megy át a súlyponton, akkor a test az állandó gyorsulás mellett forogni is fog a súlypontja körül. Ez természetesen csak nem rögzített testekre igaz; ha egy test a súlypontján kívül például egy rajta átmenő rúddal rögzítve van, akkor a forgás tengelye a rúd lesz.

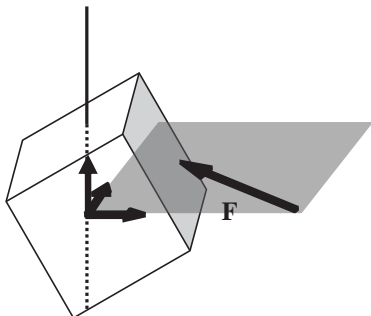
A forgatóhatás nagyságát fejezi ki a forgatónyomaték (*torque*) (jele  $\mathbf{M}$ , mértékegysége Nm).

Egy erő forgatónyomatéka a tér bármely pontjára számolható az alábbi definíció szerint:

$$(14) \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

ahol  $\mathbf{r}$  a tér azon pontjából, amelyre a forgatónyomatékat meg akarjuk határozni, az erő támadáspontjába mutató helyvektor. A definíció alapján látható, hogy mivel egy vektoriális szorzat eredménye, a forgatónyomaték axiálvektor. Ha egy konkrét testre ható erő forgatónyomatékát számoljuk, akkor az origót általában a forgás tengelyén vesszük fel úgy, hogy a koordináta-rendszer  $z$  tengelye a forgástengely legyen, az  $\mathbf{F}$  erő pedig az  $x$  és az  $y$  tengelyek által kifeszített síkba essen (5. ábra).





5. ábra

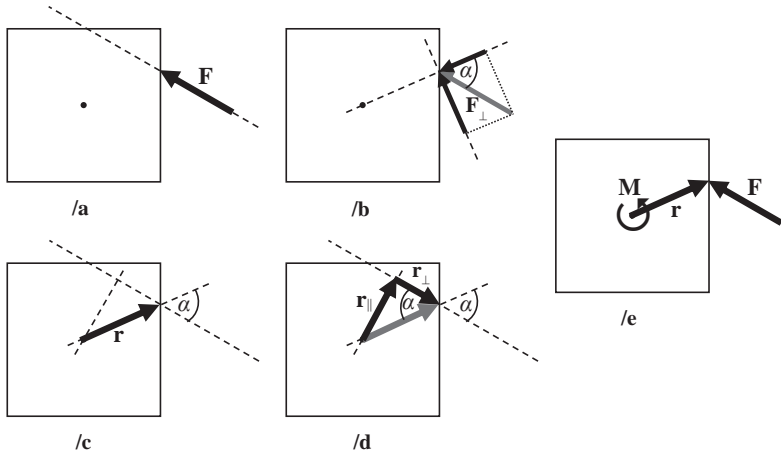
Mivel síkbeli szerkezetekkel foglalkozunk, képzeljünk el egy (az egyszerűség kedvéért négyzet alakú) „testet”, amelyre hat egy  $\mathbf{F}$  erő (6/a ábra). Ez az  $\mathbf{F}$  erő felbontható két, egymásra merőleges komponensre úgy, hogy az egyik komponens ( $\mathbf{F}_{\parallel}$ ) átmenjen a súlyponton (6/b ábra). A felbontás módjából következően  $\mathbf{F}_{\parallel}$  csak gyorsítja, a rá merőleges  $\mathbf{F}_{\perp}$  komponens csak forgatja a testet (mivel az erő támadáspontját és a test súlypontját összekötő tengelyre vett merőleges vetülete nulla). Kifejezve  $F_{\perp}$ -t az eredeti erővel, valamint az  $\mathbf{F}$  hatásvonalának és a támadáspontot a súlyponttal összekötő egyenesnek a hajlásszögével,  $\alpha$ -val, azt kapjuk, hogy

$$(15) \quad F_{\perp} = F \sin(\alpha)$$

Ezt visszaírva a forgatónyomaték képletébe a következő eredményre jutunk:

$$(16) \quad |\mathbf{M}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin(\alpha) = |\mathbf{F}| |\mathbf{r}_{\perp}|$$

vagyis a forgatónyomaték nagyságát megkapjuk, ha az erő helyvektorra merőleges komponensének nagyságát összeszorozzuk a helyvektor hosszával.



6. ábra

A forgatónyomaték, definíciója alapján, esetünkben a súlypontból az  $\mathbf{F}$  erő támadáspontjába mutató  $\mathbf{r}$  helyvektor és az  $\mathbf{F}$  erő vektoriális szorzata (6/c ábra). Bontsuk fel az  $\mathbf{r}$ -et az  $\mathbf{F}$  erő hatásvonalával párhuzamos ( $\mathbf{r}_{\parallel}$ ) és arra merőleges ( $\mathbf{r}_{\perp}$ ) komponensekre (6/d ábra)! Kifejezve  $r_{\parallel}$ -t, azt kapjuk, hogy

$$(17) \quad r_{\parallel} = r \sin(\alpha)$$

Ezt visszaírva a forgatónyomaték képletébe a következő eredményre jutunk:

$$(18) \quad |\mathbf{M}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin(\alpha) = |\mathbf{F}| |\mathbf{r}_{\perp}|$$

vagyis a forgatónyomaték nagyságát megkapjuk, ha az erő nagyságát össze-szorozzuk a hatásvonalának az origótól való távolságával. Egyszerűbb volta miatt a gyakorlatban ez utóbbi kiszámítási módot szokás alkalmazni. Az  $|\mathbf{r}_{\perp}|$  mennyiséget erőkaroknak nevezzük és  $k$ -val jelöljük.

Az egyszerűség kedvéért az  $|\mathbf{F}|$  és a  $k$  mennyiségekkel számolunk, amelyek skalárok, hiszen ezekből a forgatónyomaték nagysága meghatározható. Azonban pont skalár voltuk miatt annak irányát nem adják meg. Ennek meghatározásához a következő konvenciót használjuk: ha az erő az origóhoz képest az óramutató járásával ellentétes irányban forog, akkor előjele pozitív, ha az óramutató járásával egyező irányba, akkor előjele negatív (ez a vektoriális szorzat jobbsodrásúságából következik). Előbbi példánkban

ez azt jelenti, hogy mivel az  $\mathbf{F}$  vektor az origóhoz képest az óramutató járásával ellentétes irányba forog, a forgatónyomaték-vektor iránya a papírból kifelé mutat:  $\odot$ . A forgatás irányát jelezhetjük egy  $\curvearrowright$  (vagy egy  $\curvearrowleft$ ) nyíllal is a rajzon (6/e ábra).

Természetesen  $\mathbf{F}$ -et és  $\mathbf{r}$ -et vektorként kezelve egy adott koordináta-rendszerben ismerve komponenseiket a formális determinánst is használhatjuk. Ilyenkor előjelhelyesen megkapjuk a forgatónyomaték-vektor komponenseit az adott koordináta-rendszerben.

### 3. Síkbeli erőrendszerek

A műszaki gyakorlatban sokszor olyan feladatokkal találkozunk, amelyeknél az erők hatásvonalai egy közös síkban fekszenek, de sok, térbeli erőrendszerrel kapcsolatos feladat is visszavezethető síkbeli erőrendszerekre.

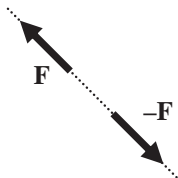
#### 3.1. Koncentrált erők

Ha egy erő egyetlen ponton hat a testre, akkor ezt a pontot támadáspontnak nevezzük, és koncentrált erőről (*point load*) beszélünk.

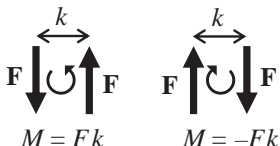
Ha egy merev testre több koncentrált erő is hat, ezeket együttesen erőrendszernek nevezzük. Az erőrendszer eredője meghatározható az egyes erők, mint vektorok összeadási szabályai szerint, azaz egy erőrendszer egyetlen eredő erővel helyettesíthető. Az eredő lehet nullvektor is.

#### 3.2. Erőpár

Két, azonos nagyságú, azonos irányú (hatásvonalaiik párhuzamosak), de ellentétes irányítottágú koncentrált erőt erőpárnak (*couple*) nevezünk. Ha a két erő hatásvonala egybeesik (7. ábra), akkor mind az eredő erő, mind az eredő forgatónyomaték  $0$ . Azonban ha a két erő hatásvonala közötti távolság  $k$ , akkor fellép egy eredő forgatónyomaték. Ha az erők nagysága  $F$ , akkor az általuk kifejtett forgatónyomaték nagysága az erőpár alapjának ( $F$ ) és az erőpár karjának ( $k$ ) a szorzata, azaz  $M = Fk$ , iránya pedig pozitív, ha az erők az óramutató járásával ellentétes irányban forgatnak, illetve negatív, ha az erők az óramutató járásával egyező irányba forgatnak (8. ábra).



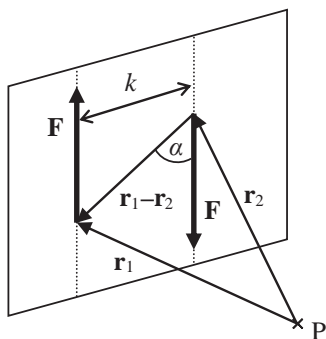
7. ábra



8. ábra

Erőpár forgatónyomatéka a tér bármely pontjára nézve azonos. Ennek az állításnak az igazolásához vegyünk fel egy  $\mathbf{F}$  alapú,  $k$  karú erőpárt és egy, az erőpár síkján kívüli  $P$  pontot (9. ábra)! Az erőpárt alkotó két erő támadáspontja a hatásvonalak tetszőleges helyén helyezkedjen el. Mutasson az  $\mathbf{r}_1$  helyvektor a  $P$  pontból az egyik erő támadáspontjába, az  $\mathbf{r}_2$  helyvektor a  $P$  pontból a másik erő támadáspontjába. Ekkor

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}) = \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F} \end{aligned}$$



9. ábra

Az  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  vektor független a P pont helyzetétől. Továbbá igaz a forgatónyomaték-vektor nagyságára, hogy

$$(20) \quad |\mathbf{M}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| |\mathbf{F}| \sin(\alpha) = Fk$$

ahol  $\alpha$  a hatásvonalak és a támadáspontokat összekötő  $\mathbf{r}_{12}$  vektor által bezárt szög.

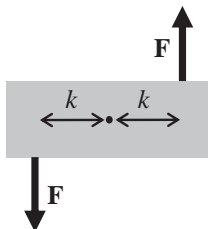
Ebből következik, hogy az erőpár forgatónyomaték-vektora úgynevezett szabad vektor, és ezért az erőpár saját síkjában (a két erő egymáshoz viszonyított helyzetét végig megtartva) szabadon eltolható, elforgatható és tetszőleges, saját síkjával párhuzamos síkba áthelyezhető.

Bármely erőpár átalakítható egy vele azonos síkban azonos nagyságú forgatónyomatékot kifejtő, de eltérő alapú és eltérő karú erőpárrá. Ha az eredeti erőpár alapja  $\mathbf{F}$  és karja  $k$ , az eredő erőpár alapja  $\mathbf{Q}$ , karja  $p$ , akkor a forgatónyomatékok  $Fk = Qp$  azonosságából adott  $Q$  esetén kifejezhető  $p$ , adott  $p$  esetén kifejezhető  $Q$ :

$$(21) \quad p = \frac{Fk}{Q}$$

$$Q = \frac{Fk}{p}$$

A forgatónyomatékok azonossága miatt az erőpárt alkotó két erő egymáshoz viszonyított iránya meg kell maradjon az új alapra való áttéréskor, különben az új erőpár ellentétes irányba fog forgatni.



10. ábra

### 3.3. Erőrendszerek egyensúlya

A 10. ábrán látható testre ható két,  $\mathbf{F}$  nagyságú erő vektoriális összege nulla. Azonban, mivel egy erőpárról van szó, kifejtenek egy  $2kF$  nagyságú pozitív forgatónyomatékot. Ez azt jelenti, hogy amellet, hogy a testre ható erők vektorösszege  $\mathbf{0}$  legyen, ahhoz, hogy a test nyugalomban legyen, azaz ne is forogjon, szükséges, hogy a rá ható forgatónyomatékok vektori összege is  $\mathbf{0}$  legyen. Az olyan erőrendszereket, amelyekre igaz, hogy  $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$  és  $\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$ , egyensúlyi erőrendszereknek nevezzük.

Az egyensúlyt skaláris alakban kifejezve, azaz egy derékszögű koordináta-rendszerben az erőket két, egymásra merőleges komponensre bontva három egyensúlyi egyenletet adhatunk meg: a vízszintes irányú erők összege nulla, a függőleges irányú erők összege nulla és a forgatónyomatékok előjeles összege is nulla:

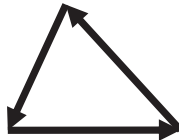
$$(22) \quad \sum_i F_{i,x} = 0$$

$$(23) \quad \sum_i F_{i,y} = 0$$

$$(24) \quad \sum_i M_i = 0$$

A legegyszerűbb egyensúlyi erőrendszer két azonos hatásvonalú, azonos nagyságú, de ellentétes irányú erő:  $+\mathbf{F}$  és  $-\mathbf{F}$  (7. ábra).

Három, nem párhuzamos hatásvonalú erő egyensúlyához az erővektorok összegének  $\mathbf{0}$  volta mellett szükséges az is, hogy forgatónyomatékaik összege is  $\mathbf{0}$  legyen, azaz hatásvonalaik egy pontban metsződjenek. A 11. ábrán látható három erővektor tehát pozitív forgatónyomatékot eredményez, bár maguknak az erővektoroknak a vektori összege nulla.



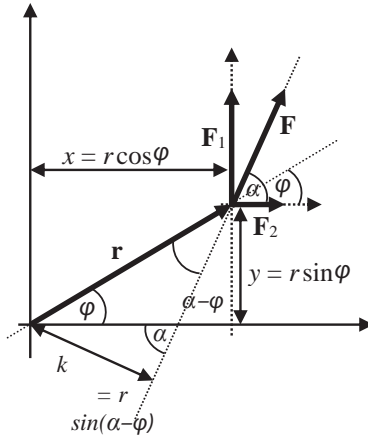
11. ábra

Egy erőrendszer mindig helyettesíthető egy erővel és egy forgatónyomatékkal, amelyek közül bármelyik, vagy akár mindkettő is lehet nulla. Ez utóbbi,

az egyensúlyi erőrendszer esetében van a test nyugalomban. Ha két különböző erőrendszernek ugyanaz az erő és forgatónyomaték az eredője (azaz nagyságuk, irányuk és irányítottáguk azonos), akkor ezeket egymás helyettesítő erőrendszereinek (*equipollent force system*) nevezzük, ugyanis ezek a testre minden tekintetben azonos hatást fejtenek ki. Bármely erőrendszerhez hozzáadhatunk egy vagy több egyensúlyi erőrendszert, az a test mozgás-állapotát nem változtatja meg.

### 3.3.1. A nyomatéki tétel

Tetszőleges erőrendszerre érvényes az úgynevezett *nyomatéki tétel*: egy erőrendszer eredőjének forgatónyomatéka megegyezik az egyes erőknek a pontra vett forgatónyomatékainak vektoriális összegével. Azaz ha először egy erőrendszer eredőjét számoljuk ki, majd annak egy pontra vett forgatónyomatékát, ugyanarra az eredményre jutunk, mint ha az egyes erők adott pontra vett forgatónyomatékait számolnánk ki először, majd ezeket a vektorokat összeadnánk.



12. ábra

Nézzük ezt meg a 12. ábrán látható általános helyzetű  $\mathbf{F}$  erő esetében! Először az origóra vett forgatónyomaték nagyságát írjuk fel úgy, hogy



az  $\mathbf{F}$  erő hatásvonalának origótól való távolságát,  $k$ -t kifejezzük az  $\mathbf{r}$  vektor és az ábráról leolvasható szögek segítségével:

$$(25) \quad k = r \sin(\alpha - \varphi)$$

valamint alkalmazzuk a két szög különbségének szinuszára vonatkozó azonosságot:

$$(26) \quad M = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = Fk = rF \sin(\alpha - \varphi) = rF(\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi)$$

Ugyanakkor az is igaz, hogy a vektoriális szorzat definíciójában a szinusz argumentumában szereplő szög, az  $\mathbf{r}$  és az  $\mathbf{F}$  vektor hajlásszöge, mint az az ábráról is leolvasható,  $\alpha - \varphi$ .

Azonban az 1.3.5. alfejezet alapján az  $\mathbf{F}$  erő fel is bontható két, a koordinátatengelyekkel párhuzamos  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erőre. Ezen két összetevő erő nagyságát kifejezhetjük az eredeti erő és annak  $x$  tengelyhez képesti hajlásszögével:

$$(27) \quad \begin{aligned} F_1 &= F \sin(\alpha) \\ F_2 &= F \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Fejezzük ki külön-külön a két erővektor-komponensből az általuk kifejtett forgatónyomaték nagyságát a hatásvonaluk és az origó közötti távolsággal, és ezeket adjuk össze, vigyázva a forgatás irányára, azaz hogy  $\mathbf{F}_1$  pozitív,  $\mathbf{F}_2$  viszont negatív irányba forgat az  $\mathbf{r}$  vektorhoz képest:

$$(28) \quad \begin{aligned} F_1 x - F_2 y &= F_1 r \cos(\varphi) - F_2 r \sin(\varphi) = \\ &= F \sin(\alpha) r \cos(\varphi) - F \cos(\alpha) r \sin(\varphi) = \\ &= rF(\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) \end{aligned}$$

ahol  $x$  az  $\mathbf{F}_1$  vektor hatásvonalának az  $y$  tengelytől vett távolsága, és hasonlóan  $y$  az  $\mathbf{F}_2$  vektor hatásvonalának az  $x$  tengelytől vett távolsága.

Írjuk fel a két erőkomponensből származó két forgatónyomaték-komponens nagyságát a vektoriális szorzat definíciója és a pótszögtétel felhasználásával:

$$(29) \quad \begin{aligned} M_1 &= |\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1| = rF_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = rF_1 \cos(\varphi) = rF \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ M_2 &= |\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2| = rF_2 \sin(-\varphi) = rF_2 (-\sin \varphi) = -rF \cos(\alpha) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

majd a kapott két kifejezést összeadva ezt kapjuk:

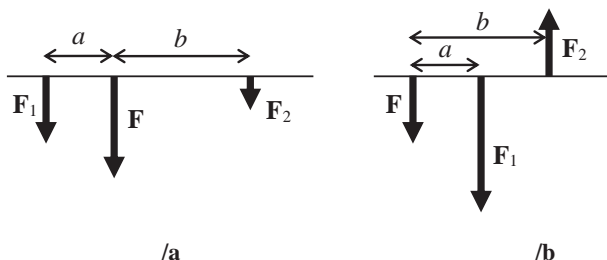
$$(30) \quad \begin{aligned} M_1 + M_2 &= rF \sin(\alpha) \cos(\varphi) - rF \cos(\alpha) \sin(\varphi) = \\ &= rF (\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) \end{aligned}$$

Amint látható, mindhárom esetben azonos eredményre jutottunk.

### 3.3.2. Erő felbontása párhuzamos erőkre

Bontsuk fel a 13/a ábrán látható  $\mathbf{F}$  erőt két, vele párhuzamos hatásvonalú összetevőre ( $\mathbf{F}_1$ -re és  $\mathbf{F}_2$ -re) úgy, hogy  $F_1 + F_2 = F$  legyen! Az összetevők  $\mathbf{F}$  hatásvonalától mért távolsága legyen  $a$  és  $b$ . A nyomatéki tételt az  $\mathbf{F}$  erő hatásvonalának egy pontjára felírva:

$$(31) \quad F \cdot 0 = F_1 a - F_2 b$$



13. ábra

Mivel a bal oldal nulla, a két komponens arányát kifejezve ezt kapjuk:

$$(32) \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a}$$

Ez az úgynevezett *emelőtörvény*.

Ha az összetevők az eredeti erőnek azonos oldalán fekszenek (13/b ábra), akkor az egyik erő irányítottságának  $\mathbf{F}$ -vel ellentétesnek kell lennie: ha nem így lenne, akkor a két új erőnek a teljes forgatónyomatéka nem lenne  $\mathbf{0}$  (mindkettő ugyanarra forgatna  $\mathbf{F}$ -hez képest), pedig az eredeti  $\mathbf{F}$  erő által kifejtett

forgatónyomaték bármely, a hatásvonalára eső pontra  $\mathbf{0}$  volt. Ez az  $-\mathbf{F}$ -hez képest negatív – erő lesz a kisebb, és ez fog  $\mathbf{F}$ -től távolabb esni.

### 3.3.3. A Ritter-módszer

Ha egy egyensúlyban levő testre négy erő hat úgy, hogy ezek közül csak egynek a nagysága ismert, akkor is meg tudjuk határozni az egyes erők nagyságát az ún. Ritter-módszer<sup>1</sup> segítségével. Ehhez azonban szükséges, hogy hatásvonalaik ne legyenek mind párhuzamosak, azaz legalább három különböző pontban metszszék egymást.

Ehhez először válasszunk ki egy olyan metszéspontot, amelyen az ismert nagyságú erő hatásvonala nem megy át, és írjuk fel erre a pontra a nyomatéki tételt. Mivel a rendszer egyensúlyban van, ezért minden pontban igaz, hogy a testre ható erők arra a pontra számított forgatónyomatékainak összege nulla:  $\sum M_i = 0$ . Továbbá a kiválasztott ponton átmegy a három ismeretlen nagyságú erőből kettő: ezek forgatónyomatéka ezért erre a pontra  $0$ . A távolságok ismeretében a két másik erő (egy ismert nagyságú és egy ismeretlen) ezen pontra vett forgatónyomatékának összegét nullává téve egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, amelyből az ismeretlen erő nagysága kiszámítható.

Következő lépésben válasszunk ki egy olyan pontot, amelyen szintén két erő hatásvonala átmegy, de egy ismert és egy ismeretlen erő hatásvonala nem. Az első kettő ezen pontra vett forgatónyomatéka nulla, így a másik két erő forgatónyomatékát felírva és nullává téve, a második ismeretlen erőt is megkapjuk.

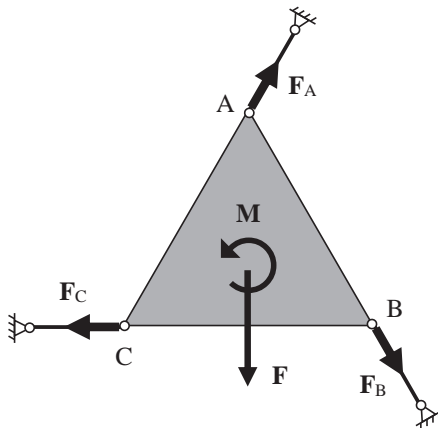
Végül egy olyan pontra írjuk fel a forgatónyomatékok összegének zérus voltát, amelyen nem megy át az ismeretlen erő, csak két ismert. Ebből az egyenletből a harmadik keresett erő nagyságát már meghatározhatjuk.

Gyorsabban is eljuthatunk a végeredményhez, ha a vízszintes (függőleges) irányú erők közül csak egynek a nagyságát nem ismerjük. Ekkor, felírva a vízszintes (függőleges) irányú erők összegére a (22) és a (23) egyenleteket, egy kivonással megkapható a kérdéses komponens. Ezért bizonyos esetekben érdemes lehet először az erőket vízszintes és függőleges komponensekre bontani.

<sup>1</sup> August Ritter (1826–1908) német mérnök

Az elsőnek kiszámított komponens célszerű megválasztásával is egyszerűsíthető a számolás: ha a forgatónyomaték zérus voltát egy olyan pontra írjuk fel, amelyen az ismert nagyságú erő és egy erre merőleges ismeretlen nagyságú erő hatásvonalára nem megy át, a továbbiakban biztosan használható lesz a vízszintes vagy függőleges irányú erők összegének 0 volta, azaz vagy a (22), vagy a (23) egyenlet.

Vizsgáljuk meg a 14. ábrán látható, három csuklóval és a háromszög oldalaival párhuzamos három rúddal megtámasztott egyenlő oldalú háromszög esetét. Az  $\mathbf{F}$  erő és az  $\mathbf{M}$  forgatónyomaték nagyságát tekintjük ismertnek, az oldalak hosszát pedig jelöljük  $\ell$ -lel. Mivel a rudak csak rúd-irányú erőt képesek felvenni (erről a 6. fejezetben még részletesen szó lesz), az azokban fellépő erők a háromszög oldalaival is párhuzamosak lesznek, az  $\mathbf{F}_A$ ,  $\mathbf{F}_B$  és  $\mathbf{F}_C$  erők hatásvonalai a háromszög oldalaira fognak illeszkedni.



14. ábra

Mivel az A ponton keresztülmegy mind az  $\mathbf{F}_A$ , mind az  $\mathbf{F}_B$ , mind az  $\mathbf{F}$  erő hatásvonalára, erre a pontra ezen erők forgatónyomatéka nulla. Mivel a szerkezet egyensúlyban van, felírhatjuk az A pontra az összforgatónyomaték nulla voltát, amelyben csak két tag fog szerepelni: az  $\mathbf{F}_C$  erő  $\ell\sqrt{3}/2$  erőkarral és az  $\mathbf{M}$  pozitív irányú forgatónyomaték. Csak az  $\mathbf{F}_C$  erő nagysága nem ismert, ezért az kifejezhető.

Hasonlóan, a B ponton az  $\mathbf{F}_B$  és az  $\mathbf{F}_C$  erők hatásvonalára megy át, így erre a pontra a forgatónyomaték-járulékok nulla. Felírva az összforgatónyomaték nulla voltát a B pontra, abban három tag lesz: az  $\mathbf{F}_A$  erő  $\ell\sqrt{3}/2$

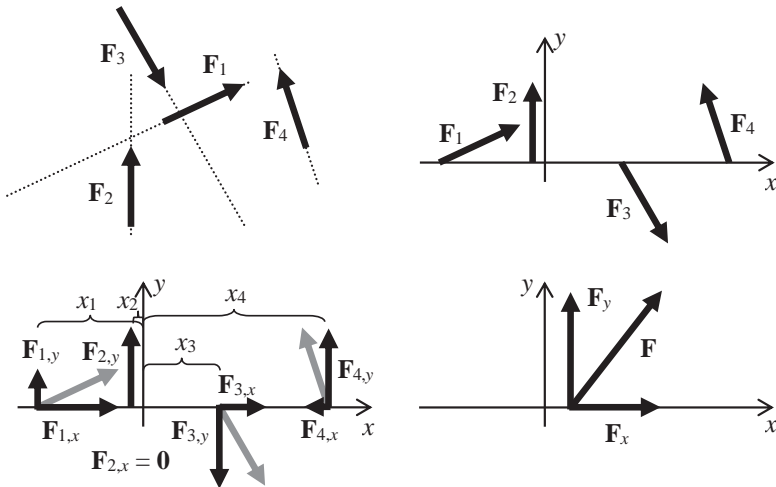
erőkkel, az  $\mathbf{F}$  erő  $\ell/2$  erőkkel és az  $\mathbf{M}$  pozitív irányú forgatónyomaték. Ezek közül csak az  $\mathbf{F}_A$  erő nagysága nem ismert, így az kifejezhető.

Végül, a C ponton az  $\mathbf{F}_C$  és az  $\mathbf{F}_A$  erők hatásvonala megy át, azaz a C pontra vett forgatónyomaték-járulékok nulla. Az összforgatónyomaték a C pontra nulla, mivel egyensúly van, és három tag ad járulékot: az  $\mathbf{F}_B$  erő  $\ell\sqrt{3}/2$  erőkkel, az  $\mathbf{F}$  erő  $\ell/2$  erőkkel és az  $\mathbf{M}$  pozitív irányú forgatónyomaték. Az egyetlen ismeretlen  $\mathbf{F}_B$  erő nagysága számítható.

### 3.3.4. Általános síkbeli erőrendszer eredőjének számítása

Általános síkbeli,  $n$  darab erőből álló erőrendszer eredőjének kiszámítására teljes mértékben alkalmas a vektorok középiskolában tanult összeadási szabálya: az erővektorokat hatásvonaluk mentén eltolva és a paralelogrammaszabály alapján összegezve lépésről lépésre meghatározható az erőrendszer eredőjének nagysága és hatásvonala.

Ennél azonban létezik gyorsabb és kevesebb hibalehetőséget hordozó eljárás is (15. ábra).



15. ábra

Első lépésként vegyünk fel egy olyan derékszögű koordináta-rendszert, amelyben el tudjuk tolni az összes erővektort hatásvonaluk mentén úgy, hogy támadáspontjuk illeszkedjen az  $x$  tengelyre. Ezután határozzuk meg minden egyes erővektornak a koordinátatengelyekre vett merőleges vetületét. Ezzel kaptunk az eredeti  $n$  darab erővektor helyett  $2n$  darabot, azonban ezek közül  $n$  darab hatásvonala az  $x$  tengellyel (ezeket jelöljük  $\mathbf{F}_{i,x}$ -szel), a másik  $n$  darab hatásvonala pedig az  $y$  tengellyel (ezeket  $\mathbf{F}_{i,y}$ -nal jelöljük) párhuzamos.

Az  $\mathbf{F}_{i,x}$  erők abszolút értékét egyszerűen előjelhelyesen összeadjuk: a koordinátatengely negatív irányába mutatóakat negatív, pozitív irányába mutatóakat pozitív előjellel. Az így kapott  $\mathbf{F}_x$  erő hatásvonala az  $x$  tengely.

Előjelhelyesen összeadva az  $\mathbf{F}_{i,y}$  erők abszolút értékeit megkapjuk az eredő erő  $y$  tengely irányú komponensének nagyságát, amelyet  $\mathbf{F}_y$ -nal jelölünk. Támadáspontjának pozícióját az  $x$  tengely mentén a nyomatéki tétel felhasználásával számoljuk ki: az  $\mathbf{F}_{i,y}$  erők forgatónyomatékainak összege bármely kiválasztott pontra és az  $\mathbf{F}_y$  erő ugyanarra a pontra vett forgatónyomatéka meg kell egyezzen. Válasszuk ennek a pontnak az origót! Ha az  $\mathbf{F}_{i,y}$  erővektor  $y$  tengelytől való távolságát  $x_i$ -vel jelöljük, az eredő  $\mathbf{F}_y$  erővektor  $y$  tengelytől való ismeretlen távolságát pedig  $x$ -szel, felírhatjuk az  $n$  darab erő és eredőjük forgatónyomatékainak egyezőségét (figyelve a forgatónyomatékok előjelére, amely a forgatás irányától függően pozitív vagy negatív):

$$(33) \quad \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n x_i F_{i,y} = x F_y = M_y$$

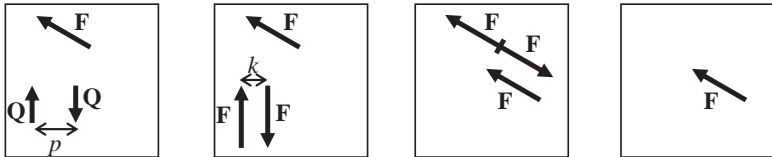
Egy ismeretlen szerepel az egyenlet harmadik tagjában:  $x$ , az  $\mathbf{F}_y$  erő keresett pozíciója. Ha  $x$  negatív, az eredő az  $x$  tengelyen az  $y$  tengelytől negatív, ha pozitív, akkor pozitív irányban található.

A keresett eredő  $\mathbf{F}$  erő nagysága az  $\mathbf{F}_x$  és az  $\mathbf{F}_y$  erők abszolút értékeiből Pitagorasz-tétellel, míg hatásvonalának a koordinátatengelyekkel bezárt szöge inverz szögfüggvénnyel számolható, figyelemmel a két komponens előjelére.

Az így megkapott  $(x; 0)$  koordinátájú pontba felmérve az  $\mathbf{F}_x$  és  $\mathbf{F}_y$  erővektorokat, majd ezeket paralelogrammaszabállyal összegezve grafikusán is megkaphatjuk az eredő erőt.

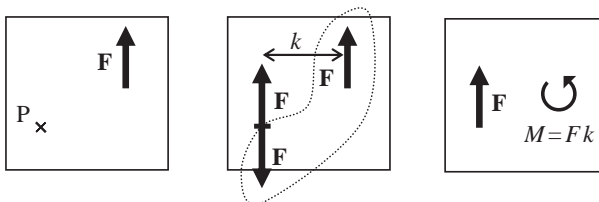
### 3.4. Erőáthelyezés

Egy azonos síkban ható  $\mathbf{F}$  erő és  $\mathbf{Q}p$  erőpár mindig transzformálható egyetlen erővé (16. ábra). Ehhez először alakítsuk át a  $\mathbf{Q}p$  erőpárt egy  $\mathbf{F}$  alapú,  $k$  karú erőpárra a (21) összefüggés szerint. Ezután toljuk el az így kapott erőpárt a síkban úgy, hogy az eredeti  $\mathbf{F}$  erő és a most már  $\mathbf{F}k$  erőpárt alkotó két  $F$  nagyságú erő közül az eredeti  $\mathbf{F}$  erővel ellentétes irányítottágú új  $\mathbf{F}$  erő közös támadáspontba kerüljön. Mivel az azonos támadáspontú  $+\mathbf{F}$  és  $-\mathbf{F}$  erők egyensúlyi erőrendszert alkotnak, ezek eltávolítása a rendszerből nem okoz változást annak mozgásállapotában. Az új  $\mathbf{F}k$  erőpár megmaradt tagja lesz a végső erő.



16. ábra

Az erőáthelyezés ennek az eljárásnak a fordítottja. Bármely testre ható erőt át tudunk helyezni egy másik pontba úgy, hogy hozzáadunk a rendszerhez egy megfelelően választott erőpárt (17. ábra).

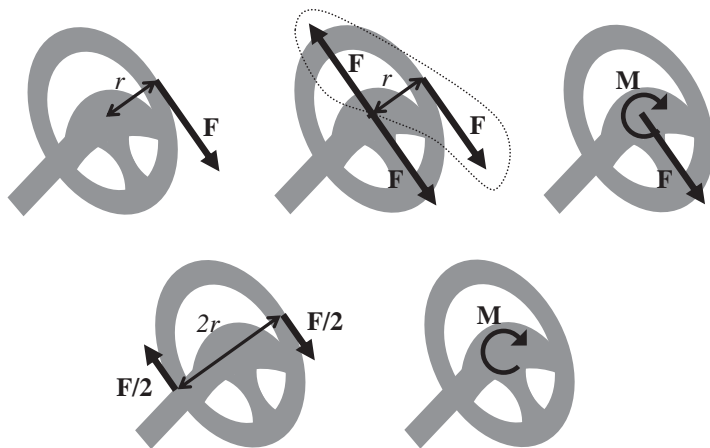


17. ábra

Hasson a testre egy  $\mathbf{F}$  erő, amelyet át akarunk helyezni a  $P$  pontba. Ekkor a  $P$  pontban adjunk hozzá a rendszerhez egy egyensúlyi erőrendszert: egy  $P$  támadáspontú  $+\mathbf{F}$  és egy  $P$  támadáspontú  $-\mathbf{F}$  erőt! Ekkor az eredeti  $\mathbf{F}$  erővel ellentétes irányú  $\mathbf{F}$  erőt és az eredeti  $\mathbf{F}$  erőt tekinthetjük egy erőpárnak, amelynek alapja  $F$ , karja az eredeti erő és a hozzáadott egyensúlyi erőrendszer

hatásvonalának távolsága, jelöljük ezt a távolságot  $k$ -val. Ekkor az erőrendszert úgy is tekinthetjük, hogy a testre hat egy, az eredeti  $\mathbf{F}$  erővel azonos nagyságú, azonos irányú, azonos irányítottságú, de eltérő támadáspontú erő és egy  $Fk$  nagyságú forgatónyomaték. Az eljárással a test mozgásállapota nem változott meg, de sokszor célszerűbb a számolások egyszerűsítése végett erő(ke)t áthelyezni.

Egy hétköznapi példa arra, hogy az erőáthelyezés segítségével jobban megérthetjük bizonyos szerkezetek igénybevételét, az egy kézzel kormányzás esete (18. ábra). Ha csak egy kézzel tekerjük az  $r$  sugarú kormánykereket egy  $\mathbf{F}$  erővel, akkor ez nem csak forgatja a kormányrudat, hanem hajlítja is. Ennek belátásához adjunk hozzá a rendszerhez egy egyensúlyi erőrendszert,  $+\mathbf{F}$ -et és  $-\mathbf{F}$ -et a kormánykerék középpontjában, ott, ahol a kormányrúd csatlakozik. Ekkor az eredeti  $\mathbf{F}$  erőt és a vele ellentétes, hozzáadott  $-\mathbf{F}$ -et egy erőpárnak tekintve ez kifejt a kormányra egy  $F r$  nagyságú forgatónyomatékot. Azonban a harmadik  $\mathbf{F}$  erő lefelé hajlítja a kormányrudat, ami jobban igénybe veszi azt. Ellenben feleakkora erővel, de szimmetrikusan két kézzel kormányozva csak egy erőpár hat a kormánykerékre, ugyanakkora forgatónyomatékot kifejtve, mint az előbb. Ez az igénybevétel azonban nem hajlítja a kormányrudat.



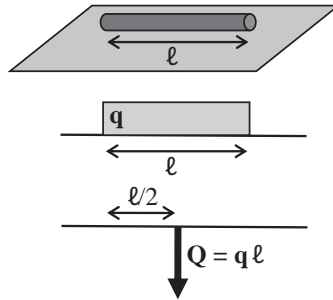
18. ábra



### 3.5. Megoszló erőrendszer

Amennyiben egy olyan erőrendszer hat egy testre, amely nem egy pontban hat, hanem egy vonal mentén, akkor (vonal menti) megoszló erőrendszerről (*distributed load*) beszélünk; jele  $\mathbf{q}$ , mértékegysége N/m.

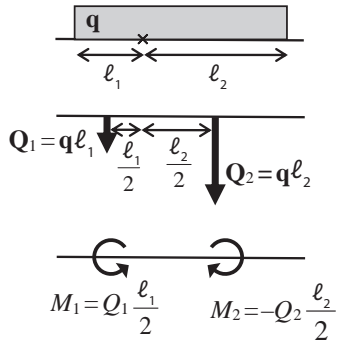
A 19. ábrán látható a megoszló erőrendszer jelölése, az úgynevezett terhelési ábra, amelyet az érintkezési vonal fölé rajzolunk. Ha a terhelés egyenletes, akkor a terhelési vonal a felfekvéssel párhuzamos. Ilyen, amikor például egy henger alakú,  $\ell$  hosszúságú rudat egy lapos felületre helyezünk: a rúd  $m\mathbf{g}$  súlyereje egy  $\ell$  hosszúságú vonal mentén oszlik meg, azaz  $\mathbf{q} = m\mathbf{g}/\ell$ .



19. ábra

Megoszló erőrendszer forgatónyomatéka a koncentrált erő forgatónyomatékához hasonlóan számolható, mindössze a  $\mathbf{q}$  megoszló erőrendszert a súlypontjában (amely egyenletes megoszló erőrendszer esetében a geometriai középpont) egy  $\mathbf{q}\ell$  koncentrált erővel kell helyettesíteni, amelyet  $\mathbf{Q}$ -val szokás jelölni.

Ha a megoszló erőrendszer átmegy a ponton, amelyre a forgatónyomatékokat számolni akarjuk, akkor annyival bonyolódik a számolás, hogy a megoszló erőrendszert két részre kell osztani a pont két oldalán, és ezeket külön-külön kell egy-egy koncentrált erővel helyettesíteni, majd a belőlük számolt forgatónyomatékokat előjelhelyesen összegezni (20. ábra).



20. ábra

A megoszló erőrendszer nemcsak egyenletes lehet, hanem a felfekvés mentén tetszőleges függvény szerint változhat. Ekkor a  $q(x)$  fajlagos terhelés ismeretében számolható ki tetszőleges  $x$  helyen a  $dx$  hosszúságú szakaszra eső  $dQ$  terhelőerő:

$$(34) \quad q(x) = \frac{dQ}{dx}$$

átrendezve:

$$(35) \quad dQ = q(x)dx$$

A helyettesítő koncentrált erő nagyságát a terhelés szélétől az  $l$  távolságig egy egyszerű integrállal számolhatjuk ki:

$$(36) \quad F = \int_0^l dQ = \int_0^l q(x) dx$$

A helyettesítő koncentrált erő támadáspontjának pozíciójára ( $s$ ) pedig a nyomatéki tétel alapján a következőt kapjuk (a jobb oldalon a  $dx$  hosszú szakaszokra jutó erők  $x$  erőkarral való szorzatainak integrálja található):

$$(37) \quad sF = \int_0^l x q(x) dx$$

A bal oldalba behelyettesítve (36) kifejezést:

$$(38) \quad s\mathbf{F} = s \int_0^{\ell} d\mathbf{Q} = s \int_0^{\ell} \mathbf{q}(x) dx$$

A (37) egyenletet és a (38) egyenletet egyenlővé téve és  $s$ -et kifejezve, majd  $\mathbf{q}(x) dx$  helyére a (35) összefüggés alapján  $d\mathbf{Q}$ -t behelyettesítve:

$$(39) \quad s \int_0^{\ell} \mathbf{q}(x) dx = \int_0^{\ell} x \mathbf{q}(x) dx$$

$$(40) \quad s = \frac{\int_0^{\ell} x \mathbf{q}(x) dx}{\int_0^{\ell} \mathbf{q}(x) dx} = \frac{\int_0^{\ell} x d\mathbf{Q}}{\int_0^{\ell} d\mathbf{Q}}$$

A megoszló erőrendszer eredője tehát keresztülmegy a terhelési ábra súlypontján (a súlypontra még részletesen visszatérünk az 5. fejezetben).

A megoszló erőrendszer lehet felület mentén megoszló is, ekkor mértékegysége  $\text{N/m}^2$ , de ilyenekkel ezen jegyzet keretében nem foglalkozunk.

## 4. A statika alaptételei

A statika tárgykörében mindenre merev testként tekintünk, ami azt jelenti, hogy a terhelések hatására létrejövő deformációkat elhanyagoljuk. Bár ez egy durva közelítés, valójában a mindennapokban sokszor megállja a helyét. A szilárdságtanban (ami a következő félév anyaga) olyan valós anyagból álló, szilárd testként modellezett szerkezetként tekintünk vizsgálatunk tárgyaira, amelyek egyensúlyi erőrendszerek hatására deformálódnak. Azonban ott is feltételezzük, hogy a test a terhelő erők hatására is egyensúlyban marad. Az ekkor fellépő kicsi, de sokszor el nem hanyagolható deformációkat ott fogjuk tárgyalni.

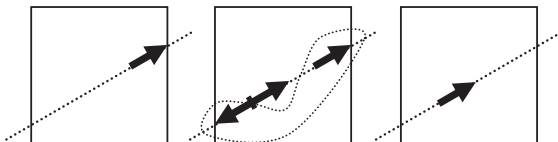
Amikor egy szilárd test nincs nyugalomban, azaz a rá ható erőrendszer nem egyensúlyi erőrendszer, azt a kinetika tárgyköre vizsgálja, amely, ellentétben a kinematikával, a mozgásokat előidéző erők és a mozgások törvényeinek összefüggéseit is vizsgálja (míg a kinematika a mozgások előidéző okaival nem foglalkozik).

A statika alaptételei a termodinamika főtételeihez hasonlóan nem levezethető, bizonyítható állítások, mint a matematikai tételek, hanem a fizikai törvényekhez hasonlóan sok megfigyelés alapján levont, általános érvényűnek tekintett szabályszerűségek. A Newton-féle gravitációs törvényről például ismert, hogy nagyon nagy gravitációs térben vagy bolygórendszerek mozgásának leírásában nem teljesen pontos eredményt ad. Űrszondák (többek között a GPS-műholdak) pályájának számításakor nem is ezzel, hanem az Einstein-féle általános relativitáselmélettel számolnak. Földi körülmények között mégis használhatjuk a Newton-féle képletet, hiszen akkora gravitációs terekben, amelyekkel itt találkozunk, a két elmélet eredményei jóval a műszereink hibahatárán belül azonos eredményt szolgáltatnak. Hasonlóan, a statika alaptételei is csak bizonyos körülmények (fénysebességnél sokkal lassabb mozgások, kis gravitációs tér) között érvényesek, de ezek a körülmények az alaptételek használatakor mindig adottak.

## 4.1. A statika I. alaptétele

Merev testre ható erőrendszer hatását nem befolyásolja, ha az erőrendszerhez egy egyensúlyi erőrendszert adunk hozzá.

Ennek az alaptételnek a következménye az erők hatásvonalukon való szabad eltolhatósága (21. ábra). Ha a hatásvonal bármely pontjában hozzáadunk egy  $+\mathbf{F}$  és egy  $-\mathbf{F}$  nagyságú erőt, az eredeti  $\mathbf{F}$  erőt és a hozzáadott  $-\mathbf{F}$  erőt tekinthetjük egy közös hatásvonalú erőpárnak, amely így szintén egy egyensúlyi erőrendszer, és így el is távolítható a rendszerből. Ezzel az eredeti  $\mathbf{F}$  erő helyett kaptunk egy azonos hatásvonalú, nagyságú, irányítottágú erőt, amely csak a támadáspontjában különbözik az eredetitől, azaz gyakorlatilag eltoltuk az eredeti  $\mathbf{F}$  erőt a hatásvonala mentén.



21. ábra

## 4.2. A statika II. alaptétele

Ha két erő hatásvonala metszi egymást, eredőjük hatásvonala is átmegy ezen a metszésponton, és benne fekszik a két erő által meghatározott síkban, nagysága pedig a két erő vektori összege.

Ha a két erő támadáspontját az I. alaptétel szerint eltoljuk a metszéspontba, a vektorok összeadására vonatkozó geometriai szabályból következik maga az alaptétel.

## 4.3. A statika III. alaptétele

Ha egy merev testre pontosan két erő hat, akkor a test akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha az erők hatásvonala és nagysága azonos, de irányítottáguk ellentétes.

Az alaptétel az erők vektori összegének nullvektor volta mellett impliciten tartalmazza a két erő forgatónyomatékai vektori összegének nullvektor voltát is.

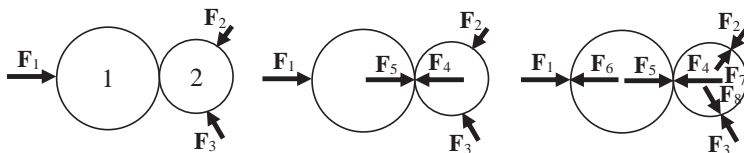
## 4.4. A statika IV. alaptétele

Két test kölcsönhatása során mindkét testre azonos nagyságú, azonos hatásvonalú és egymással ellentétes irányítottágú erő hat.

Ez Newton III. törvénye, a hatás-ellenhatás elve. Azt jelenti, hogy ha például egy falba rögzített rudat egy bizonyos erővel húzunk, és a rúd mégis nyugalomban marad, akkor a falban azonos hatásvonalú és nagyságú, de ellentétes irányítottágú erő lépett fel.

Példaként tekintsünk két érintkező testet, amelyekre három erő hat a 22. ábrán látható módon. Legyen ez a két testből álló rendszer egyensúlyban! Ehhez szükséges, hogy a három erő vektori összege nulla legyen:  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}$ , ha ugyanis például  $|\mathbf{F}_1|$  nagyobb lenne, mint  $|\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3|$ , akkor a rendszer jobbra gyorsulna. Az  $\mathbf{F}_1$  erő azonban az 1-es testet mindenképpen gyorsítja jobbra. Hogy nyugalomban legyen, a 2-es testnek kell hatnia rá egy  $-\mathbf{F}_1$  erővel. Mivel a két test csak egyetlen pontban érintkezik, ezt az erőt ebben a pontban kell kifejeznie ( $\mathbf{F}_4$ ,  $|\mathbf{F}_4| = |\mathbf{F}_1|$ ). Hasonlóképpen a 2-es testnek is hatnia kell az 1-es testre egy  $-(\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3)$  erővel ( $\mathbf{F}_5$ ,  $|\mathbf{F}_5| = |\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3|$ ).

Emellett a testek felülete sem változhat meg (nem nyomódhat be), hiszen merev testekről beszélünk, ezért a testekben is fel kell lépnie erőknek, amelyek az  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  és  $\mathbf{F}_3$  erőkkel azonos pontban, azonos nagysággal, de ellentétes irányban hatnak ( $\mathbf{F}_6$ ,  $\mathbf{F}_7$ ,  $\mathbf{F}_8$ ,  $|\mathbf{F}_6| = |\mathbf{F}_1|$ ,  $|\mathbf{F}_7| = |\mathbf{F}_2|$ ,  $|\mathbf{F}_8| = |\mathbf{F}_3|$ ).



22. ábra

Ezzel meghatároztuk a rendszerre ható erőket. A két testből álló rendszerre ható  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  és  $\mathbf{F}_3$  erőket külső erőknek, az  $\mathbf{F}_4$ ,  $\mathbf{F}_5$ ,  $\mathbf{F}_6$ ,  $\mathbf{F}_7$  és  $\mathbf{F}_8$  erőket belső erőknek nevezzük. Ugyanakkor ha önmagában az 1-es testet nézzük, akkor rá az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_4$  külső és az  $\mathbf{F}_5$  és  $\mathbf{F}_6$  belső erők hatnak. Hasonlóan a 2-es testnek az  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$  és  $\mathbf{F}_5$  erők külső, az  $\mathbf{F}_4$ ,  $\mathbf{F}_7$  és  $\mathbf{F}_8$  erők belső erői.

## 4.5. A statika V. alaptétele

A deformált állapotban, de egyensúlyban levő szilárd testeket merevnek tekinthetjük.

Ez azt jelenti, hogy ha egy szilárd test alakváltozását szilárdságtani módszerekkel meghatároztuk, utána a rá ható egyensúlyi erőrendszer további hatásainak vizsgálatakor tekinthetjük merev testnek.

## 5. A súlypont

A Föld gravitációs terében minden test fontos jellemzője annak tömege és térfogata mellett annak tömegeloszlása is. Ez egyszerűbb esetben a test gömbszimmetriától való eltérését jelenti (a test nem minden irányból ugyanúgy néz ki, alakja van), de jelentheti anyagának inhomogenitását is.

### 5.1. Az elsőrendű vagy statikai nyomaték

Ugyanakkor bármilyen tömegeloszlású testhez meg lehet határozni egy olyan pontot, az úgynevezett súlypontot (*centre of gravity*), amelyre vett forgatónyomatéka a testnek nulla. Ennek a kitüntetett pontnak az egyszerű meghatározásához vezessünk be a test leírására egy új fogalmat, az elsőrendű nyomatékot (*first moment of area*).

#### 5.1.1. Test pontra vett elsőrendű nyomatéka

Legyen adott egy tetszőleges alakú,  $V$  térfogatú test és egy pont a térben. Osszuk fel a testet kis térfogatelemekre. A felosztást minden határon túl finomítva az így kapott infinitezimális térfogatelemeket jelöljük  $dV_i$ -vel, az egyes térfogatelemeknek a ponttól vett helyvektorát pedig  $\mathbf{r}_i$ -vel.

A testnek a pontra vett *elsőrendű nyomatékán* az  $\mathbf{r}_i$  vektoroknak a megfelelő  $dV_i$  térfogatelemekkel, mint skalárokkal való szorzatainak az összegét értjük, amely a felosztás „végtelen” finomításával átmegy egy, az adott test térfogatán vett integrálba:

$$(41) \quad \mathbf{S}_{0,V} = \int_V \mathbf{r}_i dV_i$$

ahol  $\int dV_i = V$ . Az elsőrendű nyomaték tehát vektoriális mennyiség, mértékegysége  $[\text{m}^4]$ .



### 5.1.2. Test síkra vett elsőrendű nyomatéka

Egy koordináta-rendszerben az  $\mathbf{r}_i$  helyvektorok kifejezhetők koordinátáik segítségével:  $\mathbf{r}_i = (x_i; y_i; z_i)$ . Ezek segítségével az egyes koordinátasíkokra számított elsőrendű nyomatékok a (41) kifejezésből:

$$S_{xy,V} = \int_V z_i dV_i$$

$$(42) \quad S_{xz,V} = \int_V y_i dV_i$$

$$S_{yz,V} = \int_V x_i dV_i$$

### 5.1.3. Tömeg pontra vett elsőrendű nyomatéka

Homogén tömegeloszlású testet feltételezve (azaz a sűrűséget minden pontban azonosnak tekintve:  $\varrho(\mathbf{r}_i) = \varrho$ ) a (41) egyenlet mindkét oldalát beszorozva a sűrűséggel kapjuk:

$$(43) \quad \rho \mathbf{S}_{0,V} = \rho \int_V \mathbf{r}_i dV_i$$

A sűrűség konstans volta miatt bevihető az integrálba, és felhasználva a sűrűség  $\varrho = m/V$  definíciójának  $\varrho = dm_i/dV_i$  differenciális alakját, kapjuk az  $m$  tömeg pontra vett elsőrendű nyomatékát:

$$(44) \quad \mathbf{S}_{0,m} = \int_V \rho \mathbf{r}_i dV_i = \int_m \mathbf{r}_i dm_i$$

ahol  $\int dm_i = m$ . Mértékegysége [m kg].

### 5.1.4. Tömeg síkra vett elsőrendű nyomatéka

Egy koordináta-rendszerben az egyes helyvektorokat az  $\mathbf{r} = (x; y; z)$  koordinátás alak segítségével kifejezve az egyes koordinátasíkokra vett elsőrendű nyomatékokat megkapjuk a (44) kifejezésből:

$$(45) \quad \begin{aligned} S_{xy,m} &= \int_m z_i \, dm_i \\ S_{xz,m} &= \int_m y_i \, dm_i \\ S_{yz,m} &= \int_m x_i \, dm_i \end{aligned}$$

### 5.1.5. Áttérés másik koordináta-rendszerre

Egy „A” koordináta-rendszerben egy  $m = \int dm$  tömegnek a koordináta-rendszer origójára vett elsőrendű nyomatéka  $\mathbf{S}_{0,m,A} = \int \mathbf{r}_A \, dm$ . Toljuk el a koordináta-rendszert egy  $\mathbf{r}_{AB}$  vektorral és jelöljük ezt az új, eltoltt koordináta-rendszerben „B”-vel. Mivel minden, „A” koordináta-rendszer-beli pontba mutató  $\mathbf{r}_A$  helyvektor kifejezhető a pont „B” koordináta-rendszer-beli  $\mathbf{r}_B$  helyvektorának és az  $\mathbf{r}_{AB}$  vektornak a segítségével:  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_B$ , így fel tudjuk írni az elsőrendű nyomatékot a „B” koordináta-rendszerben is:

$$(46) \quad \mathbf{S}_{0,m,B} = \int_m \mathbf{r}_B \, dm = \int_m (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{AB}) \, dm = \int_m \mathbf{r}_A \, dm - \int_m \mathbf{r}_{AB} \, dm$$

Az első tag a tömegpont „A” koordináta-rendszerben számított elsőrendű nyomatéka, a második tagból pedig  $\mathbf{r}_{AB}$  kihozható az integrál elé:

$$(47) \quad \mathbf{S}_{0,m,B} = \mathbf{S}_{0,m,A} - \mathbf{r}_{AB} \int_m dm = \mathbf{S}_{0,m,A} - m \mathbf{r}_{AB}$$

Az eltoltt koordináta-rendszerben az elsőrendű nyomatékot tehát megkaphatjuk, ha az eredeti koordináta-rendszerben vett elsőrendű nyomatékvektorból kivonjuk a koordináta-rendszer eltolását jellemző vektornak a tömegpont tömegével mint skalárral vett szorzatát.

### 5.1.6. Ívdarab pontra vett elsőrendű nyomatéka

Felosztva egy adott  $s$  hosszúságú ívdarabot „végtelen sok”  $ds_i$  részre (ív-elemre) és ezeknek egy ponttól vett helyvektorát  $\mathbf{r}_i$ -vel jelölve az ívdarab adott pontra vett elsőrendűnyomaték-vektora:

$$(48) \quad \mathbf{S}_{0,s} = \int_s \mathbf{r}_i ds_i$$

ahol  $\int ds_i = s$ . Mértékegysége  $[\text{m}^2]$ .

### 5.1.7. Ívdarab tengelyre vett elsőrendű nyomatéka

Egy koordináta-rendszerben az  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$  koordinátás alak segítségével kifejezve az egyes koordinátatengelyekre vett elsőrendű nyomatékokat a (48) kifejezésből:

$$(49) \quad S_{x,s} = \int_s y_i ds_i$$

$$S_{y,s} = \int_s x_i ds_i$$

### 5.1.8. Síkidom pontra vett elsőrendű nyomatéka

Hasonlóképpen definiálhatjuk a síkidomnak egy pontra vett elsőrendűnyomaték-vektorát. Ebben az esetben a  $dA_i$  felületelemnek a ponttól vett helyvektorát jelöljük  $\mathbf{r}$ -rel. Az elsőrendűnyomaték-vektor:

$$(50) \quad \mathbf{S}_{0,A} = \int_A \mathbf{r}_i dA_i$$

ahol  $\int dA_i = A$ . Mértékegysége  $[\text{m}^3]$ .

### 5.1.9. Síkidom tengelyre vett elsőrendű nyomatéka

Egy koordináta-rendszerben az  $\mathbf{r}_i$  helyvektorok kifejezhetők koordinátáik segítségével:  $\mathbf{r}_i = (x_i; y_i)$ . Ezek segítségével az egyes koordinátatengelyekre számított elsőrendű nyomaték az (50) kifejezésből:

$$S_{x,A} = \int_A y_i \, dA_i$$

(51)

$$S_{y,A} = \int_A x_i \, dA_i$$

Ez az összefüggés általánosan, bármilyen alakú síkidomra érvényes.

## 5.2. A súlypont számítása

Az olyan egyenesek, amelyek egy síkidomot két olyan részre osztanak, amelyek elsőrendű nyomatéka azonos abszolút értékű, egy pontban metszik egymást. Ezt a pontot a síkidom súlypontjának (*centre of mass*) nevezzük.

Hasonlóképpen az olyan síkok, amelyek egy testet két olyan részre osztanak, amelyek elsőrendű nyomatéka azonos abszolút értékű, a súlypontban metszik egymást.

A Föld gravitációs tere a földfelszínen már homogénnek tekinthető, azaz az egyes tömegpontokra vagy akár makroszkópikus méretű kiterjedt testekre ható gravitációs erő tekinthető homogén megoszló erőrendszernek, amely függőlegesen lefelé mutat.

Legyen adott egy koordináta-rendszerben egy  $V$  térfogatú,  $\mathbf{Q} = m\mathbf{g}$  súlyú test, ahol  $\mathbf{g}$  a konstansnak tekinthető gravitációs gyorsulás. Osszuk fel ezt a testet „végtelen finoman”. Az így kapott  $dV_i$  térfogatelemek súlya legyen  $d\mathbf{Q}_i$ , ahol  $\int d\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}$  és  $\int dV_i = V$ . Felírható továbbá az egyes térfogatelemekre a  $d\mathbf{Q}_i = dm_i\mathbf{g}$  egyenlőség is. Jelöljük az egyes térfogatelemekbe mutató helyvektorokat  $\mathbf{r}_i$ -vel!

Tegyük fel, hogy létezik egy olyan pont – jelöljük ennek helyvektorát  $\mathbf{r}_{sp}$ -vel –, amelybe a test tömegét „összesűrítve” a rá ható súlyerő által keltett forgatónyomaték megegyezik a valódi, kiterjedt testre ható, gravitációs erő által keltett forgatónyomatékkal, vagyis az egyes térfogatelemekre

ható forgatónyomatékok vektori összegével. Felírva a nyomatéki tételt erre a pontra:

$$(52) \quad \mathbf{r}_{\text{sp}} \mathbf{Q} = \int_V \mathbf{r}_i d\mathbf{Q}_i$$

Átrendezve, a súlyerő differenciális alakját behelyettesítve, majd a konstans gravitációs gyorsulással egyszerűsítve megkapjuk az úgynevezett súlypont helyvektorát:

$$(53) \quad \mathbf{r}_{\text{sp}} = \frac{\int_V \mathbf{r}_i d\mathbf{Q}_i}{\mathbf{Q}} = \frac{\int \mathbf{g} \mathbf{r}_i dm_i}{m \mathbf{g}} = \frac{\int \mathbf{r}_i dm_i}{m} = \frac{\mathbf{S}_{0,m}}{m}$$

Egy koordináta-rendszerben az  $\mathbf{r}_{\text{sp}}$  helyvektor kifejezhető koordinátás alakban:  $\mathbf{r}_{\text{sp}} = (x_{\text{sp}}; y_{\text{sp}})$ . Ezek segítségével az egyes koordinátatengelyekre számított súlypont az (53) kifejezésből:

$$(54) \quad x_{\text{sp}} = \frac{\int y_i dm_i}{m}$$

$$y_{\text{sp}} = \frac{\int x_i dm_i}{m}$$

Vegyük észre, hogy az (53) összefüggés számlálójában a (44) kifejezést látjuk, azaz tömeg pontra vett elsőrendű nyomatékát. Eszerint homogén gravitációs térben egy homogén test súlypontja megegyezik a tömegközépponttal. Behelyettesítve a sűrűség  $\varrho = m/V$  definícióját és annak  $\varrho = dm/dV_i$  differenciális alakját az (53) egyenlet jobb oldalába és a konstans sűrűséggel egyszerűsítve:

$$(55) \quad \mathbf{r}_{\text{sp}} = \frac{\int \rho \mathbf{r} dV_i}{\rho V} = \frac{\int \mathbf{r} dV_i}{V}$$

Egy koordináta-rendszerben az  $\mathbf{r}_{\text{sp}}$  helyvektort koordinátás alakban kifejezve:  $\mathbf{r}_{\text{sp}} = (x_{\text{sp}}; y_{\text{sp}})$ . Ezek segítségével az egyes koordinátatengelyekre számított súlypont az (55) kifejezésből:

$$(56) \quad x_{\text{sp}} = \frac{\int_V y_i \, dV_i}{V}$$

$$y_{\text{sp}} = \frac{\int_V x_i \, dV_i}{V}$$

Az (55) egyenlőség nevezőjében a test teljes térfogata szerepel, míg számlálójában a (41) kifejezést látjuk, azaz test pontra vett elsőrendű nyomatékát. Eszerint homogén gravitációs térben egy homogén test súlypontja megegyezik a geometriai középponttal is.

Két azonos sűrűségű ( $\varrho$ ) és magasságú ( $\ell$ ), de eltérő területű alaplappal rendelkező, hasáb alakú test súlya:  $\mathbf{Q}_1 = \varrho A_1 \ell \mathbf{g}$  és  $\mathbf{Q}_2 = \varrho A_2 \ell \mathbf{g}$ . Kifejezve a két súlyerő arányát:

$$(57) \quad \frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{Q}_2} = \frac{\rho A_1 \ell \mathbf{g}}{\rho A_2 \ell \mathbf{g}} = \frac{A_1}{A_2}$$

azaz a testek súlya arányos az alaplajuk területével. Ez határesetben (azaz amikor  $\ell \rightarrow 0$ ) is igaz.

Ilyen értelemben síkidomok súlypontjáról is beszélhetünk. Az (55) egyenletbe behelyettesítve a  $V = A \ell$  összefüggést és az  $\ell \rightarrow 0$  határátmenetet elvégezve azt kapjuk, hogy a súlypont a felületen ébredő súlyerők eredőjének támadáspontja:

$$(58) \quad \mathbf{r}_{\text{sp}} = \frac{\int_A \mathbf{r} \, dA_i}{A} = \frac{\mathbf{S}_{0,A}}{A}$$

Egy koordináta-rendszerben az  $\mathbf{r}_{\text{sp}}$  helyvektort koordinátás alakban kifejezve:  $\mathbf{r}_{\text{sp}} = (x_{\text{sp}}; y_{\text{sp}})$ . Ezek segítségével az egyes koordinátatengelyekre számított súlypont az (58) kifejezésből:

$$x_{\text{sp}} = \frac{\int y_i dA_i}{A}$$

(59)

$$y_{\text{sp}} = \frac{\int x_i dA_i}{A}$$

Az (58) összefüggés nevezőjében a teljes terület szerepel, míg a számlálóban megjelent az (50) kifejezés, a síkidom pontra vett elsőrendű nyomatéka. Azaz homogén síkidomokra is láthatjuk, hogy a súlypont két dimenzióban is megegyezik a geometriai középponttal, hasonlóan, mint ahogy az (55) kifejezés alapján három dimenzióra láttuk, ami azonban a levezetés módjából fakadóan egyáltalán nem meglepő eredmény.

Az (59) összefüggés mindkét oldalát beszorozva  $A$ -val a jobb oldalon az  $x$ , illetve az  $y$  tengelyre vett elsőrendű nyomaték fog szerepelni, míg a bal oldalon a teljes terület és egy távolság dimenziójú mennyiség. Ez azt jelenti, hogy a kiterjedt síkidomot helyettesíthetjük egy, a tengelytől  $x_{\text{sp}}$  (illetve  $y_{\text{sp}}$ ) távolságra elhelyezkedő „vonallal” (vagy akár egyetlen ponttal, a súlyponttal), amelybe az egész síkidom „anyaga” „bele van sűrítve”.

Hasonlóképpen az alaplap egyik dimenziójában is elvégezhetjük ezt a határátmenetet, és ezzel ívdarabok („végtelen kis” átmérőjű „drótok”) súlypontjára kaphatunk összefüggést:

$$(60) \quad \mathbf{r}_{\text{sp}} = \frac{\int \mathbf{r}_i ds_i}{s} = \frac{\mathbf{S}_{0,S}}{A}$$

Egy koordináta-rendszerben az  $\mathbf{r}_{\text{sp}}$  helyvektort a koordinátás  $\mathbf{r}_{\text{sp}} = (x_{\text{sp}}; y_{\text{sp}})$  alakban kifejezve felírható koordinátatengelyekre számított súlypont a (60) kifejezés alapján:

$$x_{\text{sp}} = \frac{\int y_i \, ds_i}{s}$$

(61)

$$y_{\text{sp}} = \frac{\int x_i \, ds_i}{s}$$

A (60) összefüggésben a nevezőben az ívdarab hossza van, a számlálóban pedig a (48) kifejezés, azaz ívdarab pontra vett elsőrendű nyomatéka: a súlypont és a geometriai középpont valóban megegyezik egydimenziós homogén objektumokra is.

### 5.3. Egyszerű síkidomok súlypontja

Összetett síkidomok súlypontjának (és elsőrendű nyomatékának) számításához szükségünk lesz néhány egyszerű síkidom súlypontjának az ismeretére.

#### 5.3.1. Kör, paralelogramma és háromszög súlypontja

Néhány egyszerű síkidom súlypontját nemcsak középiskolás geometriai ismereteink alapján, hanem egyszerű intuíció alapján is meg tudjuk mondani (bár ennek szabatos megfogalmazása okozhat nehézséget). Így a kör(lap)ról, a négyzetről és a téglalapról „érezzük”, hogy súlypontjuk a „közepükön” van. Ez körnél valóban a kerület, mint körvonal két átmérőjének a metszéspontja, négyzetenél és téglalapnál az átlók metszéspontja.

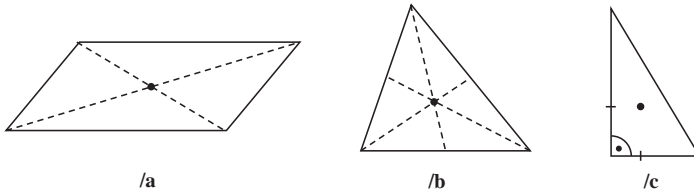
Ez utóbbi azonban sokkal általánosabban is igaz: paralelogramma súlypontja az átlók metszéspontjában található (23/a ábra).

Háromszög súlypontjának meghatározására is eljuthatunk elemi megfontolások alapján. Első lépésben határozzuk meg a háromszög egy súlyvonalát, azaz azt a szakaszt, amely a háromszöget két egyenlő területű részre osztja (azaz itt alátámasztva nem „billen el” egyik irányba sem). Könnyen belátható, hogy ez a szakasz a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz. Ez ugyanis a háromszöget két olyan háromszögre bontja, amelyek alapja megegyezik (hiszen az eredeti háromszög oldalát éppen



feleztük), és nemcsak magasságuk, hanem konkrét magasságvonaluk is azonos: az eredeti háromszögdalról a csúcsra bocsátott merőleges szakasz. Két háromszög területe pedig, amelyek alapja és magassága megegyezik, egyenlő. Ez azt is jelenti az 5.2. alfejezet elején tett állítás alapján, hogy a kapott két háromszög elsőrendű nyomatékának a súlyvonal egyenesére, mint tengelyre vett elsőrendű nyomatéka azonos nagyságú, de ellentétes előjelű.

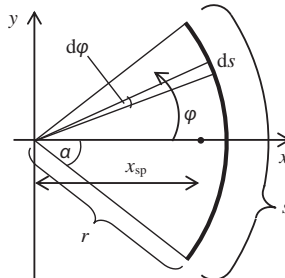
Mindhárom csúcs-oldal párra meghatározva a súlyvonalat belátható, hogy ezek egy pontban metszik egymást, a súlypontban (23/b ábra). Szintén belátható, hogy a súlypont távolsága egy adott csúcstól kétszerese a súlypontnak a csúccsal szemközti oldaltól vett távolságának. Ez derékszögű háromszögben azt is jelenti, hogy a súlypont a befogók harmadánál helyezkedik el (23/c ábra).



23. ábra

### 5.3.2. Körív súlypontja

Vegyünk fel egy  $2\alpha$  nyílásszögű,  $r$  sugarú körívet úgy, hogy a szimmetriatengelye egybeessen a koordináta-rendszer egyik tengelyével (24. ábra)! Szimmetriamegfontolások alapján a súlypontnak erre az egyenesre kell esnie.



24. ábra

A körív hossza  $s = r2\alpha$ . Válasszunk ki egy tetszőleges, rövid („végtelenül kicsi”)  $ds$  hosszúságú körívelemet, amelyhez tartozó középponti szöget jelöljük  $d\varphi$ -vel. Ezzel a körívelem hossza  $ds = r d\varphi$ . Mivel a  $ds$  ívelem „végtelenül rövid”, középpontja megegyezik önmagával, azaz elsőrendű nyomatéka az  $y$  tengelyre  $x ds$ . Mivel  $x = r \cos\varphi$ , ezért

$$(62) \quad \begin{aligned} S_{y,s} &= x ds = r \cos\varphi ds = r \cos\varphi r d\varphi \\ S_{y,s} &= r^2 \cos\varphi d\varphi \end{aligned}$$

Jelöljük a súlypont origótól való távolságát  $x_{sp}$ -vel. Az elsőrendű nyomatékot az origóra kétféleképpen számíthatjuk ki. A súlypont origótól való  $x_{sp}$  távolságát a teljes körív „területével” szorozzuk, de mivel itt nem síkidomról, hanem egydimenziós vonalról van szó, nem a területet, hanem a hosszát,  $s$ -et vesszük. Másrésztől az egyes  $ds$  körívelemek elsőrendű nyomatékát (mivel „végtelen rövid” ívelemekkel számolunk, nem összeadva, hanem) összeintegrálva is ugyanezt kell kapnunk. Az integrálást  $\varphi$  szerint végezzük, amelyet az ábrán látható módon mérünk az  $x$  tengelytől pozitív irányba, ezért az integrálási határok  $-\alpha$  és  $+\alpha$  lesznek.

$$(63) \quad x_{sp}s = x_{sp}r2\alpha = \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos\varphi d\varphi$$

Átrendezve az egyenletet és felhasználva, hogy a szinuszfüggvény páratlan függvény, azaz  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ , a körcikk súlypontjára kapjuk:

$$(64) \quad x_{sp} = \frac{r^2}{2r\alpha} [\sin\varphi]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{r}{2\alpha} (\sin\alpha + \sin\alpha) = r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

A képletbe például a félkörív paramétereit behelyettesítve kapjuk, hogy  $2\alpha = \pi$ , azaz  $\alpha = \pi/2$ ,  $\sin(\pi/2) = 1$ , amelyből  $x_{sp} = 2r/\pi$ .

### 5.3.3. Körcikk súlypontja

Legyen adott egy  $R$  sugarú,  $2\alpha$  középponti szögű körcikk. Osszuk föl ezt a körcikket „végtelen finoman” úgy, hogy a létrejövő körcikkek külső ívének hossza elhanyagolható legyen az  $R$  sugár hossza mellett. Ekkor a külső körív görbülete is elhanyagolható, és tekinthetjük a kis körcikkeket olyan

egyenlő szárú háromszögeknek, amelyek egyik oldala egy egyenes szakasznak tekinthető körívem, másik két oldaluk  $R$ . Mivel a háromszög súlypontja a magasságvonal csúcstól távolabbi harmadánál van (és a háromszög egyenlő szárú), ezért az egyes körcikkelemek súlypontjai egy olyan körívre fognak esni, amelynek középponti szöge  $2\alpha$  és a körcikk csúcsától való távolsága  $2R/3$ . Ezzel a körcikk „anyagát” „belesűrítettük” egy körívbe, amelynek a (64) egyenlet alapján már tudjuk számolni a súlypontját az  $r = 2R/3$  helyettesítéssel:

$$(65) \quad x_{\text{sp}} = r \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2R}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

## 5.4. Összetett síkidomok elsőrendű nyomatéka és súlypontja

Sok esetben olyan síkidomokkal találkozunk, amelyeknek elsőrendű nyomatékát nem ismerjük, azonban feloszthatók néhány egyszerűen paraméterezhető síkidomra. Ekkor az integrálás műveletének additivitása miatt az összetett síkidom elsőrendű nyomatéka számítható úgy is, hogy az egyes egyszerű rész-síkidomok elsőrendű nyomatékait integrálással meghatározzuk és vesszük azok összegét.

### 5.4.1. Áttérés integrálásról szorzatösszegre

Ez az eljárás azonban tovább egyszerűsíthető. Bontsuk fel az összetett síkidomot olyan rész-síkidomokra, amelyeknek ismerjük nemcsak a területét ( $A$ ), hanem súlypontjaik egy koordináta-rendszerben vett helyét ( $r_i$ ): paralelogrammákra (téglalapokra), kör(cikk)ekre, háromszögekre. Ekkor az elsőrendű nyomaték számítása egy olyan szorzatösszeg meghatározására egyszerűsödik, amely annyi tagból áll, ahány rész-síkidomra osztottuk az eredeti összetett síkidomot (jelöljük ezt  $n$ -nel). Az egyes részsíkidomok elsőrendű nyomatéka ugyanis számítható úgy is, hogy a súlypontjuk helyvektorát összeszorozzuk a területükkel. Ez azért lehetséges, mivel (mint az 5.2. alfejezetben láttuk) a Föld homogénnek tekintett gravitációs tere ugyanazt a hatást gyakorolja egy kiterjedt síkidomra, mintha annak teljes „tömege” a súlypontjába lenne „sűrítve” (feltételezve, hogy a síkidom

homogén tömegeloszlású, azaz a területe arányos a tömegével). Így az egyes, felületen vett integrálokat egy-egy szorzásra egyszerűsítettük. Ezen szorzatok összegeként pedig a teljes, összetett síkidom elsőrendű nyomatéka is előáll:

$$(66) \quad \mathbf{S}_{0,A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i A_i$$

A tengelyre vett elsőrendű nyomaték az egyes rész-síkidomok súlypontjainak adott tengelytől vett távolságai segítségével határozhatók meg, ha  $\mathbf{r}_i = (x_i; y_i)$ :

$$(67) \quad S_{x,A} = \sum_{i=1}^n y_i A_i$$

$$S_{y,A} = \sum_{i=1}^n x_i A_i$$

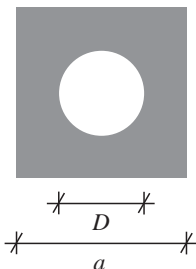
Az elsőrendű nyomaték ismeretében már a súlypont is meghatározható. Azt mindössze a síkidom teljes  $A$  felületével kell leosztani:

$$(68) \quad \mathbf{r}_{\text{sp}} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i A_i}{A}$$

ahol  $A = \sum A_i$ .

#### 5.4.2. $A$ „negatív terület”

A mindennapi gyakorlatban gyakran fordulnak elő olyan síkidomok, amelyek nem folytonosak, hanem egy vagy több lyuk van bennük. Ezeket nem szükséges megpróbálni folytonos rész-síkidomokra bontani, és ezek elsőrendű nyomatékait összegezni, ha a lyukak alakja megegyezik egy már ismert egyszerű síkidom alakjával. Sőt, sokszor ez geometriailag nem is lehetséges; gondoljunk például egy  $a$  oldalú négyzetre, a közepén egy kör alakú,  $D$  átmérőjű lyukkal (25. ábra). Azonban ebben az esetben is lehetséges az elsőrendű nyomaték kiszámítása a felület paraméterezése és integrálás nélkül.



25. ábra

Bontsuk fel a 25. ábrán látható síkidomot két részre, de jelen esetben úgy, hogy az egyik rész-síkidom legyen egy  $a$  oldalú „teli”, azaz közepén nem lyukas négyzet, a másik pedig egy  $D$  átmérőjű körlap. Mind a négyzet, mind a körlap súlypontjának ismerjük a helyét. Az elsőrendű nyomaték kiszámítása úgy történik, hogy a négyzet súlypontjának helyvektorát megszorozzuk a négyzet területével, majd ebből kivonjuk a körlap súlypontja helyvektorának és területének a szorzatát. Ez praktikusán azt jelenti, hogy a teljes négyzet pozitív elsőrendű nyomatékához hozzáadtuk a lyuk „negatív” elsőrendű nyomatékát.

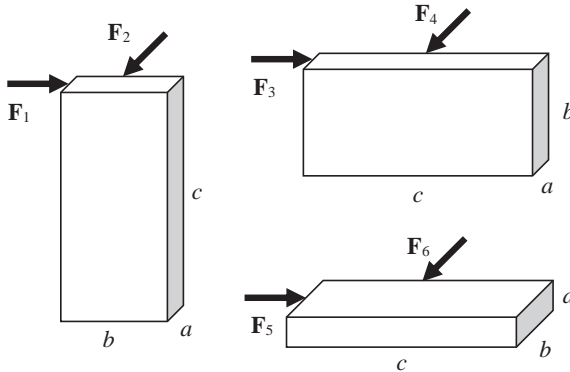
Ez az eljárás azonos eredményt szolgáltat azzal, mintha kizárólag a síkidom teli részére alkalmaztuk volna az elsőrendű nyomatéknak az (50) kifejezésben szereplő definícióját.

## 5.5. Stabilitás

Ahogy már láttuk a 2. fejezetben, nem mindegy, hogy egy erő hogyan hat a testre: forgatni is fogja, vagy csak mozgatni. Hasonlóan: egy test stabilitása függ attól, hogy hogyan hatnak rá az erők.

Stabilitás alatt az állás szilárdságát, biztonságát értjük. Egy tárgy akkor áll a legstabilabban, amikor helyzetéből a legnehezebb kimozdítani.

A 26. ábrán egy homogén téglatestet láthatunk, amelyre három pozícióban két-két irányból hat erő, amelyek mindegyike azonos nagyságú. Jelöljük a téglatest három oldalának hosszát növekvő sorrendben  $a$ -val,  $b$ -vel és  $c$ -vel. Melyik erő billenti fel legkönnyebben és melyik a legnehezebben a téglatestet?



26. ábra

A megoldás az egyes erők forgatónyomatékainak egymáshoz való viszonyában keresendő. Az egyes  $\mathbf{F}_i$  erők billentő forgatónyomatékával ( $\mathbf{M}_b$ ) szemben ugyanis a téglatestre ható gravitációs erő egy stabilizáló forgatónyomatékot ( $\mathbf{M}_s$ ) fejt ki. A stabilitás mértéke ezen két forgatónyomaték arányával jellemezhető:

$$(69) \quad S = \frac{M_s}{M_b}$$

Ha a stabilizáló forgatónyomaték nagyobb, mint a billentő, azaz ha  $S > 1$ , akkor a test az adott terhelésre stabil; ha a stabilizáló forgatónyomaték kisebb, mint a billentő, azaz ha  $S < 1$ , akkor a test az adott terhelésre felbillen.

A 26. ábrán látható példa esetében az  $\mathbf{F}_i$  erők egy erőpárt alkotnak a talajon fellépő reakcióerővel: itt tapad a test, ezért nem mozogni fog az  $\mathbf{F}_i$  erő hatására, hanem forogni, pontosabban billenni. Az erőkar tehát az erő támadáspontja és a talaj közti oldal hosszúsága. A gravitációs erő ( $\mathbf{G}$ ) által kifejtett forgatónyomaték karja azonban a megfelelő  $\mathbf{F}_i$  erő hatásvonalával egybeeső oldal felével egyezik meg, mivel a test súlya a súlypontban (ami a téglatest geometriai középpontjában található) fellépő erővel jellemezhető, és így az erőkar a súlypont és a téglatest szélének a távolsága. Ez az  $\mathbf{F}_1$  erő esetében tehát azt jelenti, hogy

$$(70) \quad \begin{aligned} M_{b1} &= F_1 c = Fc \\ M_{s1} &= G_1 \frac{b}{2} = G \frac{b}{2} \end{aligned}$$

és ezzel

$$(71) \quad S_1 = \frac{M_{s1}}{M_{b1}} = \frac{G b}{2 F c}$$

A többi helyzetre is kiszámítva:

$$(72) \quad S_2 = \frac{G a}{2 F c}, S_3 = \frac{G c}{2 F b}, S_4 = \frac{G a}{2 F b}, S_5 = \frac{G c}{2 F a}, S_6 = \frac{G b}{2 F a}$$

Konkrét számértékekkel, például  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$  értékekkel és az  $F = G$  esetre meghatározva az egyes stabilitási értékekre kapjuk:  $S_1 = 0,3$ ,  $S_2 = 0,1$ ,  $S_3 = 0,833$ ,  $S_4 = 0,167$ ,  $S_5 = 2,5$  és  $S_6 = 1,5$ . Tehát erre a terhelésre az 5. és a 6. pozíció stabil, a másik négy esetben felbillen a téglatest. A legstabilabb az 5-ös, a leginstabilabb a 2-es helyzet.

## 6. Kényszerek

Ahhoz, hogy egy valós szerkezet nyugalomban legyen, valamilyen módon rögzíteni kell, illetve szabad elmozdulását valamilyen módon korlátozni.

### 6.1. Szabadsági fok

Egy kiterjedt síkbeli rendszer (ami legegyszerűbb esetben akár egy rúd is lehet) kétféle mozgást tud végezni: transláció (elmozdulás) a síkban (egy erő hatására) és forgás egy, a síkra merőleges tengely körül (egy forgatónyomaték hatására). Mindkettő vektormennyiség, azonban a forgást, mivel csak a síkra merőleges tengely körül történhet (azaz a forgatónyomaték-vektor iránya adott, csak nagysága és irányítottága nem) egy előjeles számmal is leírhatjuk. Hasonlóképpen, ha felvesszünk a síkban egy koordináta-rendszert, a szerkezet elmozdulását okozó erővektor ennek két (merőleges) tengelyére vett merőleges vetülete szintén leírható egy előjeles számmal. Azaz a szerkezet mozgását befolyásoló hatásokat le tudjuk írni három adattal: a rá ható erők eredőjének vízszintes és függőleges komponensével és a forgatónyomaték nagyságával. Mivel a statikában egyensúlyi állapotokkal foglalkozunk, mindhárom mennyiségnek nullának kell lennie. Ezt fejeztük ki a 3.3. alfejezetben a három egyensúlyi egyenlettel, lásd (22)–(24) egyenletek.

Ezt másképpen úgy mondhatjuk, hogy egy kiterjedt síkbeli rendszernek három szabadsági foka van.

Azonban általában nem egyensúlyi erőrendszerek hatnak, a szerkezet mégis egyensúlyban van, egyensúlyban kell lennie, maradnia. Egy hídnak, amelyre szerkezetének önsúlya mellett például a rajta áthaladó járművek is kifejtenek egy lefelé mutató nyomóerőt, nem szabad ezen erők hatására tömegével arányosan gyorsulnia lefelé. Azaz az olyan szerkezetek mozgását, amelyekre nem egyensúlyi erőrendszerek hatnak, korlátozni kell.

Az erre szolgáló szerkezeti elemeket kényszereknek (*support*) nevezzük.



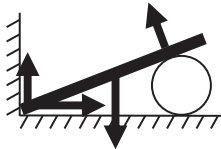
## 6.2. A kényszerek fajtái

A rendszerre ható nemegyensúlyi erőrendszerhez tehát olyan módon kell „hozzáadni” erőket (és forgatónyomatékokat, kvázi erópárokat), hogy a teljes erőrendszer egyensúlyi legyen. Másképp megfogalmazva: olyan kényszereket kell a rendszerbe építeni, amelyekben a rendszerre ható nemegyensúlyi erőrendszerrel azonos nagyságú, de ellentétes irányítottágú erők (és forgatónyomatékok), úgynevezett reakcióerők (és reakció-forgatónyomatékok) vagy kényszererők ébrednek, megakadályozandó a rendszer mozgását. Minden egyes reakciókomponens egy szabadsági fokot köt le.

### 6.2.1. Támasz

A legegyszerűbb kényszer a támasz (*smooth surface support*), amely lehet sík felületű vagy görbe felületű. A reakcióerő mindig az érintkezési pontban lép fel, és iránya merőleges a két test érintősíkjára.

Mivel az egyes támaszokon fellépő erők irányai ismertek, csak nagyságuk ismeretlen, a támasz esetében az ismeretlen reakciókomponensek száma 1 (vagyis a támasz 1 szabadsági fokot köt le).

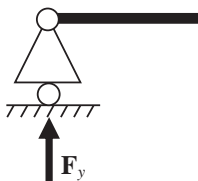


27. ábra

Ilyen például egy hengerre fektetett palló (27. ábra) esetében a három fellépő kényszererő, amely egyensúlyt tart a palló függőlegesen lefelé mutató  $mg$  súlyerejével. A súlyerő kompenzálódik egyrészt a talajban ébredő felfelé mutató erővel, másrészt a hengeren fellépő erő függőleges komponensével. Azonban éppen a palló ferde felfekvése miatt a hengeren fellépő ferde irányú erő vízszintes komponense is kompenzálásra szorul, hogy a palló nyugalomban legyen. Ez történik meg a falban ébredő vízszintes irányú nyomóerő által.

### 6.2.2. Görgő

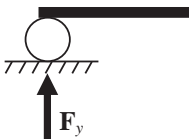
A hidaknál sűrűn alkalmazott görgős alátámasztás vagy görgős saru (*roller*) (28. ábra) az alátámasztási síkon szabadon elmozdulhat (azaz a hozzá kapcsolódó rúdon ébredő, rúddal párhuzamos irányú erőket nem tudja átvenni), el is fordulhat egy tengely körül (azaz forgatónyomatékokat sem tud kompenzálni), de az alátámasztásra merőleges irányban nem tud elmozdulni. Ez azt jelenti, hogy a rajta fellépő reakcióerő mindig merőleges a támasztás síkjára.



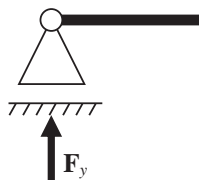
28. ábra

Ennek a reakcióerőnek a nagysága az egyetlen ismeretlen, vagyis a görgő 1 szabadsági fokot köt le.

A szintén hidaknál gyakran alkalmazott hengeres saru (29. ábra) és csúszó saru (30. ábra) gyakorlati megvalósítása eltérő, de fentebb ismertetett tulajdonságaik megegyeznek a görgős támaszáival.



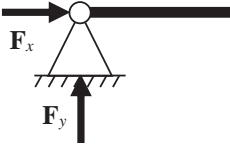
29. ábra



30. ábra

### 6.2.3. Csukló

A fix csukló (*pin/hinge*) (31. ábra) azonban rögzítve van az alátámasztás síkjában, ezért nem csak rúdírányú, de arra merőleges irányú erőt is kompenzálni tud. Viszont a hozzá rögzített rúd szabadon elfordulhat egy tengely körül, így forgatónyomatékokat nem tud átvenni.

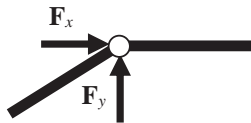


31. ábra

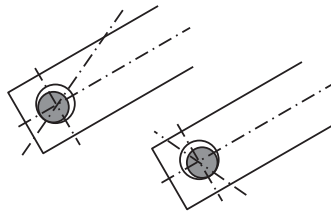
Azaz az ismeretlen reakciókomponensek száma 2 (vagyis a csukló 2 szabadsági fokot köt le).

Az úgynevezett belső csukló azonos elven működik, de ez két rudat rögzít egymáshoz úgy, hogy egymáshoz képest el tudjanak fordulni (32. ábra).

A csuklós rögzítést általában úgy oldják meg, hogy a rúd végét átfúrják, és az abba helyezett csap kiálló végeit rögzítik (33. ábra). Mivel a csap a furatban „kotyog”, a felfekvés bármely ponton lehetséges, de egy adott erőrendszer esetében mindig határozott. A csuklóerő iránya tetszőleges lehet, de mindig átmegy a csukló középpontján.



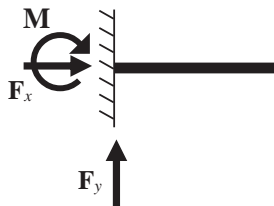
32. ábra



33. ábra

### 6.2.4. Befogás

A befogás (*fixed support*) (34. ábra) a test szilárd rögzítése valamilyen tartószerkezethez, például falhoz (befalazás). Mivel a test sem elmozdulni, sem elfordulni nem tud, ezért a befogás mind vízszintes, mind függőleges irányú erőt kompenzálni tud, és a test elfordulását is megakadályozza, ami három ismeretlent jelent.



34. ábra

Ezért a befogás ismeretlen reakciókomponenseinek száma 3 (vagyis a befogás 3 szabadsági fokot köt le).

### 6.2.5. Rúd

A (statikai) rúd (*bar*) (35. ábra) olyan kényszer, amely mindkét végén csuklóval kapcsolódik valamilyen szerkezethez, és csak a végein levő csuklókon vesz fel erőhatást. Keresztmetszete általában állandó, de ez nem szükségszerű. A csuklóknál leírtakból az is következik, hogy a rúderő hatásvonala csak a csuklók középpontjait összekötő egyenes lehet. A két csuklón fellépő erők iránya ellentétes, ezért a rúderő iránya húzó vagy nyomó lehet.



35. ábra

### 6.2.6. Kötél

A kényszerként alkalmazott kötelet vagy kábelt (*rope / cable*) (36. ábra) nyújthatatlannak, tömeg nélkülinek és tökéletesen hajlékonynak tekintjük. Mindig arra feszül, amerre az erő húzza, azaz a rajta fellépő erő mindig

kötélirányú. Abban tér el a rúdtól, hogy a rajta fellépő reakcióerő csak húzóirányú lehet.



36. ábra

Itt most mindig figyelmen kívül hagytuk a súrlódás szerepét, amelyre egy későbbi fejezetben fogunk visszatérni.

### 6.3. Statikai határozottság és határozatlanság

Egy szerkezetet statikailag határozottnak (*statically determinate*) nevezünk, ha a (22)–(24) statikai egyensúlyi egyenletekből a reakcióerők egyértelműen meghatározhatóak. Ekkor a szerkezetben annyi és olyan kényszer van, amelyek összes ismeretlen reakciókomponenseinek száma megegyezik a szerkezet szabadsági fokainak számával (vagyis a kényszerek az összes szabadsági fokot lekötik).

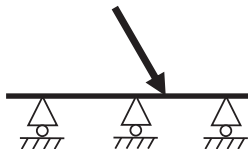
Például egy rúd csuklóval és egy görgővel statikailag határozott rendszert alkot, mert a csukló ismeretlen reakciókomponenseinek száma 2, a görgőé 1, a szerkezet szabadsági fokainak száma pedig éppen ezek összege, azaz 3.

Ha a kényszerek összes ismeretlen reakciókomponenseinek száma nagyobb, mint a rendszer szabadsági fokainak száma, akkor a rendszert statikailag határozatlannak (*statically indeterminate*) nevezzük. Amennyivel több szabadsági fokot kötnek le a kényszerek, mint amennyi a szerkezetnek van, annyszorosan határozatlan a rendszer. Egy rúd a végén két csuklóval ezért  $2 + 2 = 4 > 3$ ;  $4 - 3 = 1$ -szeresen határozatlan. Egy mindkét végén befalazott rúd azonban  $3 + 3 = 6 > 3$ ;  $6 - 3 = 3$ -szorosan határozatlan. Az ilyen rendszerek támasztóerői tisztán statikai módszerekkel nem határozhatóak meg, szilárdságtani összefüggésekre is szükség van.

### 6.4. Stabilitás és labilitás

Ha egy szerkezet bármilyen terhelés hatására nyugalomban marad, a szerkezetet stabilnak nevezzük. Ha azonban létezik olyan terhelés, amelynek hatására a szerkezet nem tud nyugalomban maradni, akkor a szerkezetet labilisnak (elmozdulónak) nevezzük.

Fontos, hogy az, hogy a szerkezet szabadsági fokainak száma megegyezik a kényszerek által lekötött szabadsági fokok számával (vagy annál nagyobb), még nem jelenti a szerkezet stabilitását: gondoljunk egy három görgővel alátámasztott tartóra. Bár a tartó szabadsági fokainak száma 3 és a három görgő  $3 \cdot 1 = 3$  szabadsági fokot képes lekötni, a szerkezet bármely, a tartó tengelyére nem merőleges komponenset is tartalmazó erő hatására elmozdul oldalirányban (37. ábra). Ráadásul a 37. ábrán látható szerkezet esetében még az egyes görgők függőleges irányú reakcióerői sem határozhatóak meg a (22)–(24) egyenletekből, vagyis a szerkezet statikailag határozatlan is. Bár egy görgőt kivéve a függőleges reakcióerők számolhatóak lesznek, de a szerkezet a stabilitás hiánya miatt továbbra sem lesz statikailag határozott, hiszen a reakcióerők továbbra sem tudják biztosítani a (22)–(24) egyenletek érvényességét.



37. ábra

Ha azonban az ismeretlen reakciókomponensek száma nagyobb, mint a kényszerek által lekötött szabadsági fokok száma, akkor a szerkezet biztosan labilis.

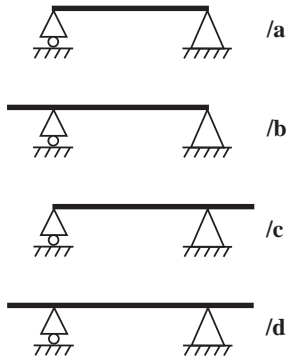


## 7. Kéttámaszú tartók

Két ponton megtámasztott, erő(k) és/vagy forgatónyomaték(ok) által terhelt rudat kéttámaszú tartónak (*simply supported beam*) nevezünk.

A kéttámaszú tartóknak számtalan műszaki alkalmazása van gerendáktól kezdve tengelyeken át egészen kisebb hidakig. Pozíciójuk általában vízszintes.

Legegyszerűbb esetben a rúd a két végén van alátámasztva (38/a ábra). Ha azonban egyik vagy mindkét végén túllóg az alátámasztási pontokon, egy- (38/b és 38/c ábrák) vagy két konzolos (38/d ábra) tartóról beszélünk.



38. ábra

Szükséges, hogy az egyik kényszer görgő legyen, a másik csukló. Ezek összesen ugyanis három szabadsági fokot kötnek le, vagyis a rendszer sem nem elmozduló, sem nem statikailag határozatlan.

A görgős megtámasztás célja hármas. Egyrészt lehetővé teszi a tartó hosszirányú méretváltozását, amely származhat például hőtágulásból vagy a tartóra ható erő általi megnyúlásból. Ez jelenti a görgő azon tulajdonságának gyakorlati megvalósulását, hogy az alátámasztással párhuzamos irányú erőt nem tud felvenni.

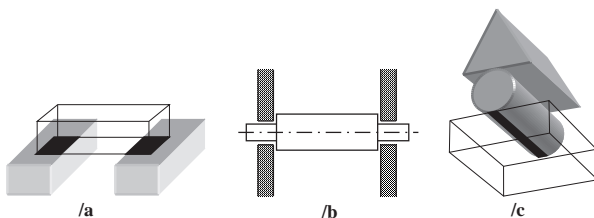
Másrészt lehetővé teszi a tartó elfordulását. Ha a görgő valamelyik oldalán például függőleges irányú erő vagy koncentrált forgatónyomaték



(*ideal moment*) hat, ez nem feszültségként jelenik meg a görgő és a tartó kapcsolódási pontjánál, hanem ehelyett a tartó egy kis szögelfordulását eredményezi (ezzel részletesen a szilárdságtan témakörében fogunk foglalkozni). Ezt a gyakorlati tényt korábban úgy fogalmaztuk meg, hogy a görgő forgatónyomatékot nem tud kompenzálni.

E két tulajdonságából már következik a harmadik, nevezetesen az, hogy biztosítja, hogy a rá ható erő mindig az alátámasztásra merőleges irányú legyen (ha a két előző tulajdonság után ez nem állna fenn, akkor nem lenne a görgő jelenlétének észrevehető hatása a tartóra, azaz mindegy lenne, be van-e építve vagy nincs). Ez jelenti annak a gyakorlati megvalósulását, hogy a görgő csak az alátámasztásra merőleges irányú erőt tud felvenni.

A felfekvések a valóságban általában nem pontszerűek, azzal ellentétben, ahogy az ábrázolás alapján naivan elképzelnénk, hanem gyakorlatilag mindig sík vagy görbe felületek. Két betontömb közötti palló felfekvése például két téglalap (39/a ábra), egy csapágyazott tengelyé két hengerpalást (39/b ábra), egy görgőé az alátámasztásán pedig egy téglalap (39/c ábra); bár az ez utóbbit létrehozó kis deformációt általában elhanyagoljuk és a támaszási „felületet” egy egydimenziós szakasznak tekintjük.



39. ábra

Egy felületen megoszló erőrendszer azonban szükségtelenül megbonyolítja a számolásokat. Akkor is azonos eredményeket kapunk, ha ezeket a támaszási felület súlypontjában a megfelelő nagyságú koncentrált erővel helyettesítjük.

A két kényszer távolságát támaszköznek vagy feszítávolságnak nevezük és általában  $\ell$ -lel jelöljük. A bal oldali kényszer és a tartó találkozási pontját A-val, a jobb oldaliét B-vel szoktuk jelölni, az ott ébredő reakcióerőket  $\mathbf{F}_A$ -val és  $\mathbf{F}_B$ -vel.

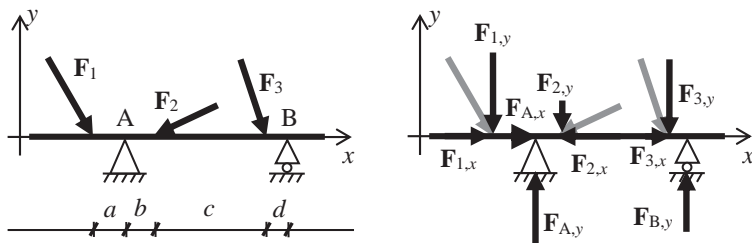
A kéttámaszú tartó számolásában a fő feladat a reakcióerők és a tartó igénybevételeinek meghatározása. Egy keresztmetszet igénybevétele alatt a keresztmetszet egyik oldalán levő erőrendszernek a keresztmetszetre gyakorolt hatását értjük, amely lehet

- húzás (nyomás),
- hajlítás,
- nyírás vagy
- csavarás (ezt csak térbeli erőrendszer idézheti elő).

## 7.1. Koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartó

Ha egy kéttámaszú tartóra ismert nagyságú koncentrált erők hatnak, a két feltámasztáson létrejövő reakcióerők közvetlenül számíthatók. Ezek ismeretének nagy jelentősége van, hiszen a támasztásokat aszerint kell kialakítani, hogy egy adott igénybevételt elbírnak. Az így meghatározott igénybevétel a felhasználható anyagok, technológiák, kialakítások szempontjából is befolyásolja a végső konstrukciót. Emellett a tartókkal kapcsolatos további vizsgálatokra is csak a reakcióerők ismeretében léphetünk előre.

Nézzük ezt meg folyamatában a 40. ábra példáján!



40. ábra

Első lépésben az erőket felbontjuk a tartóval párhuzamos ( $x$  irányú) és a tartóra merőleges ( $y$  irányú) komponensekre:  $F_{1,x}$ ,  $F_{1,y}$ ,  $F_{2,x}$ ,  $F_{2,y}$ ,  $F_{3,x}$ ,  $F_{3,y}$ . Mivel a görgő a tartóval párhuzamos irányú erőt nem tud felvenni, a párhuzamos erőkomponenseket előjelhelyesen összeadva megkapjuk azt az erőt, amelylyel azonos nagyságú, de ellentétes irányítású  $x$  irányú reakcióerőnek kell ébrednie a csuklón ( $\sum F_{i,x} = 0$ ):  $F_{1,x} - F_{2,x} + F_{3,x} = -F_{A,x}$ . Ha  $-F_{A,x}$  negatív, akkor az  $F_{A,x}$  erő az  $x$  tengely mentén negatív irányba (balra) mutat, ha  $-F_{A,x}$  pozitív, akkor az  $F_{A,x}$  erő az  $x$  tengely mentén pozitív irányba (jobbra) mutat.

Az  $y$  irányú komponensek azonban mind a görgőn, mind a csuklón ki-váltak egy tartóra merőleges reakcióerőt. Ezek nagyságának meghatározásához írjuk fel az egyik kényszerre (pl. az A pontra) a forgatónyomaték zérus voltát ( $\sum M_i = 0$ ). Az ezen a kényszeren átmenő reakcióerő hatásvonalának

a távolsága a kényszertől 0, ezért  $F_{A,y}$  forgatónyomaték-járuléka 0. Ismerve az egyes támadó erők távolságát a kényszerektől, egy olyan egyenletet kapunk, amelyben egy ismeretlen van: a másik kényszerezen ébredő  $y$  irányú reakcióerő ( $F_{B,y}$ ), amely kifejezhető:

$$(73) \quad M_A = 0 = aF_{1,y} - bF_{2,y} - (b+c)F_{3,y} + (b+c+d)F_{B,y}$$

Hasonló egyenletet felírva a másik kényszerre, megkapjuk a másik reakcióerőt is.

$$(74) \quad M_B = 0 = (a+b+c+d)F_{1,y} + (b+c+d)F_{2,y} + dF_{3,y} - (b+c+d)F_{A,y}$$

Ellenőrzésképpen fel szokás írni a függőleges irányú erők összegét ( $\sum F_{iy} = 0$ ). Ha ez valóban nulla, helyesen számoltunk.

$$(75) \quad \begin{aligned} F_{A,y} + F_{B,y} - F_{1,y} - F_{2,y} - F_{3,y} &= 0 \\ F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} &= F_{A,y} + F_{B,y} \end{aligned}$$

## 7.2. Igénybevételi ábrák

Egy tartó kialakításához elengedhetetlenül fontos, hogy elvileg valamennyi keresztmetszetének az igénybevételét ismerjük. Csak így biztosítható, hogy a terhelések hatására ne menjen tönkre. Bár magával a kialakítással a szilárdságtan foglalkozik, az igénybevételek statikai módszerekkel határozhatók meg. Az igénybevételeket grafikusán, úgynevezett igénybevételi ábrákon szoktuk ábrázolni. Ehhez először nézzük meg, milyenek lehetnek az egyes keresztmetszetek igénybevételei a legegyszerűbb esetben, azaz csak koncentrált erőkkel terhelt kéttámaszú tartók esetében.

Ha egy tartó nyomott vagy húzott, ennek a ténynek nincs hatása a tartót igénybe vevő forgatónyomatékokra, hiszen a nyomóerők hatásvonala egybeesik a tartóval, azaz forgató hatást sem tud rá gyakorolni.

Ugyanakkor azzal is tisztában kell lenni, hogy ha egy tartó minden pontjában az összforgatónyomaték nulla, az nem jelenti azt, hogy a tartó ne lenne igénybe véve. Egy mérleghinta is, ha nyugalomban van, bár a rá ható összforgatónyomaték nulla, a két karja ellentétes irányban, de ugyanakkora mértékben hajlítja a rudat az alátámasztási pont körül, hiszen ha mással nem is, önsúlyukkal terhelve vannak. Ha nem ugyanakkora lenne a keresztmetszet két oldalán ható forgatónyomaték, akkor a tartó forogna e körül a keresztmetszet körül.

Egy kiválasztott  $K$  keresztmetszet húzáson vagy nyomáson kívüli igénybevételeinek meghatározásához helyettesítsük először a keresztmetszet bal oldalán levő erőket az eredőjükkel! Ennek az  $\mathbf{F}$  erőnek a távolsága a  $K$  keresztmetszettől legyen  $f$ ! Helyezzük át ezt az erőt a  $K$  keresztmetszetre, azaz adjunk hozzá a rendszerhez a  $K$  keresztmetszetben egy  $+\mathbf{F}$  és  $-\mathbf{F}$  nagyságú erőkből álló erópárt! Ekkor a helyettesítő  $\mathbf{F}$  erő és a hozzáadott  $-\mathbf{F}$  erő által alkotott erópár hatása a keresztmetszetre egy  $fF$  nagyságú forgatónyomatékkal balról.

A  $K$  keresztmetszet jobb oldalán található erőket helyettesítsük egy, a keresztmetszettől  $g$  távolságra található  $\mathbf{G}$  erővel! Ezt is áthelyezve a keresztmetszetre kapunk egy  $gG$  nagyságú forgatónyomatékot és egy  $\mathbf{G}$  erőt a keresztmetszeten.

A keresztmetszet egyensúlya miatt a két oldalán ható forgatónyomatékok összegének nullának kell lennie, hogy a tartó ne forogjon a  $K$  keresztmetszet körül:  $fF = -gG$ . Továbbá a keresztmetszetre ható erők összegének is nullának kell lenniük, hogy a keresztmetszet nyugalomban legyen:  $F = -G$ . Ez azt jelenti, hogy egyensúlyban levő tartóra annak mindkét oldalán azonos nagyságú, de ellentétes irányú eredő erőnek és forgatónyomatéknak kell hatnia.

Ennek a  $fF$  és  $gG$  „forgatónyomatékpárnak” az egyik tagját nevezzük hajlítónyomatéknak, mert ez az a hatás, amely balról és jobbról azonos mértékben, de eltérő irányban hajlításra veszi igénybe a tartót.

A  $K$  keresztmetszetre ható  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{G}$  erő nyíróhatást fejt ki a keresztmetszetre. Ez azt jelenti, hogy a keresztmetszetet terhelő nyíróerópár alapja a keresztmetszet egyik oldalára eső erők összege.

Tehát az előbbieken elmondottak alapján három különböző igénybevételi ábrát kell felrajzolnunk, amelyekben a tartó három szabadsági fokának megfelelő igénybevételeket ábrázoljuk. Ezek az  $x$  irányú erők hatását bemutató nyomóerőábra (N), az  $y$  irányú erők hatását ábrázoló nyíróerőábra (V) és (nem a forgatónyomaték, hanem) a hajlítónyomatéki ábra ( $M_x$ ).

### 7.2.1. A nyomóerőábra

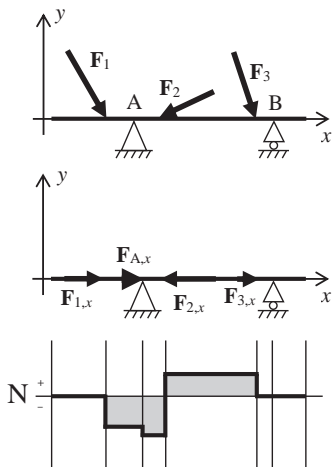
A nyomóerőábra (*axial force diagram*) felrajzolásánál tehát csak az  $x$  irányú erőket vesszük figyelembe. A tartó bal oldali végéről indulunk, itt a nyomóerő 0, mivel szabad végen a nyomóerő mindig nulla.

Nyomott rúd igénybevételét negatív, a húzott rúd igénybevételét pozitív előjellel ábrázoljuk. Jelen példában „érezzük”, de grafikusán is ki fog jönni,

hogy a tartó az  $F_1$  erő és az  $F_2$  erő támadáspontja között nyomott (a csukló és  $F_2$  között erősebben, mint  $F_1$  és a csukló között), az  $F_2$  erő és az  $F_3$  erő támadáspontja között húzott.

Az ábrázolás során a tartó mentén balról jobbra haladunk, és amikor  $x$  irányú erő támadáspontjához érünk, ott a függőleges tengelyen elmozdulunk annyit, amekkora az ott található nyomóerő az (általunk felvett) erőlépték alapján. Az  $x$  tengely pozitív irányába mutató erő esetében lefelé, negatív irányába mutató erő esetén felfelé lépünk a lépték szerint. Ha a tartó egy szakaszán nyomott, ott a nyomóerőábra negatív lesz, ha húzott, pozitív. Minél nagyobb a tartó adott szakaszára ható nyomóerő, annál távolabb van az ábra adott pontja az  $N$  ábra nullszintjétől.

Két támadáspont között vízszintes vonalat húzunk, és csak a következő (külső vagy reakció-) erőnél mozdulunk el felfelé vagy lefelé. Az egész tartón végigmenve, minden húzó- és nyomóerőt ezen a módon ábrázolva a tartó jobb végére érve ismét 0-hoz kell jutnunk (41. ábra).



41. ábra

Ha a tartó bal oldali végén van a csukló, és ezért itt fellép egy  $x$  irányú reakcióerő, vagy itt hat egy koncentrált külső erő, akkor, bár 0-ból indulunk, azonnal egy fel- vagy lelépéssel kezdünk, akkora mértékben, amekkora az erő nagysága. Ha a tartó jobb oldali végén található egy koncentrált erő vagy a csukló reakcióereje, ideérve az erővel arányosan elmozdulunk a megfelelő irányba, és ekkor kell 0-ba érkeznünk.

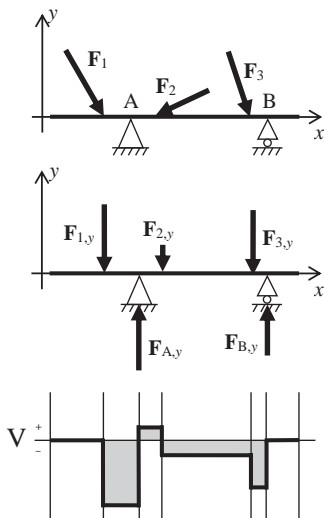
Természetesen a tartó jobb oldaláról indulva egy ekvivalens igénybevételei ábrát kapnánk.

### 7.2.2. A nyíróerőábra

A nyíróerőábra (*shear force diagram*) felvételénél hasonlóan járunk el, mint a nyomóerőnél, csak itt az  $y$  irányú erőket vesszük figyelembe.

A tartó bal oldali végén a nyíróerő nulla, mivel szabad végen vagyunk (kivéve, ha itt hat egy külső vagy egy reakcióerő). Innen indulva és a tartó mentén jobbra haladva minden egyes  $y$  irányú erő támadáspontjában annyit mozdulunk el a függőleges tengelyen, amennyi az ott található nyíróerő az (általunk felvett) erőlépték alapján. Fölfelé mutató erő nyíróerejét pozitívnak, lefelé mutató erő nyíróerejét negatívnak vesszük.

Két támadáspont között vízszintes vonalat húzunk, és csak a következő (külső vagy reakció-) erőnél mozdulunk el fölfelé vagy lefelé. Az egész tartón végigmenve, minden nyíróerőt ezen a módon ábrázolva a tartó jobb végére érve ismét 0-hoz kell jutnunk (42. ábra).



42. ábra

Ha a tartó bal oldali végén van az egyik kényszer, és ezért itt fellép egy  $y$  irányú reakcióerő, vagy itt hat egy koncentrált külső erő, akkor, bár 0-ból indulunk, azonnal egy fel- vagy lelépéssel kezdünk, akkora mértékben, amekkora az erő. Ha a tartó jobb oldali végén található egy koncentrált erő vagy egy kényszer, ideérve az erővel arányosan elmozdulunk a megfelelő irányban, és ekkor kell 0-ba érkeznünk.

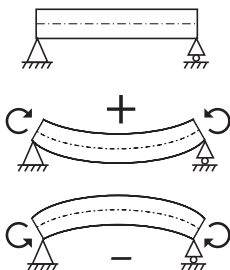
A tartó jobb oldaláról indulva itt is egy ekvivalens igénybevételi ábrát kapnánk, mindössze az előjelek lennének fordítottak, ami csak konvenció kérdése.

### 7.2.3. A hajlítónyomatéki ábra

A hajlítónyomaték egy adott keresztmetszetre, ahogy az alfejezet elején láttuk, nem a keresztmetszetre ható összforgatónyomaték, hanem csak az egyik oldalán ható forgatónyomatékok összege.

Első lépésben a jellegzetes pontokban határozzuk meg a hajlítónyomatékokat: az egyes nyíróerők támadáspontjaiban. Ennek módja, hogy az adott nyíróerőtől balra vagy jobbra levő erők forgatónyomatékát számoljuk, azaz a tőle balra vagy jobbra levő egyes erők nagyságát beszorozzuk azok támadáspontjának origótól vett távolságával, és ezeket a szorzatokat előjelhelyesen összeadjuk.

Az előjelkonvenció a következő: ha a keresztmetszetet, amelyre a hajlítónyomatékokat számoljuk, lerögzítve az adott forgatónyomaték úgy hajlítaná meg a tartót, ahogy az önsúlya alatt is meghajolna, akkor a hajlítónyomaték pozitív. Ha ellentétesen, akkor negatív (43. ábra).

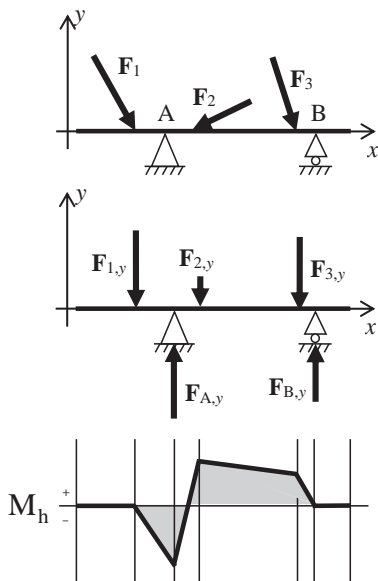


43. ábra

Fontos, hogy csak az adott keresztmetszetről balra vagy jobbra levő erőket kell figyelembe venni, magát az adott keresztmetszetben ható erőt nem, hiszen annak hatásvonala egybeesik a keresztmetszettel, ezért nem gyakorol rá forgatónyomatékokot. Éppen ezért abban a keresztmetszetben, ahol a bal szélső erő hat, és a tőle balra levő összes keresztmetszetben a hajlítónyomaték nulla. Hasonlóan zérus a hajlítónyomaték abban a keresztmetszetben, ahol a jobb szélső erő hat, és a tőle jobbra levő összes keresztmetszetben is. Tartó szabad (azaz nem befalazott) végén a hajlítónyomaték mindig nulla.

Ha meghatároztuk ezekben a jellegzetes keresztmetszetekben a hajlítónyomatékokat, akkor ezeket felmérjük a hajlítónyomatéki ábrára (*bending moment diagram*) az (általunk választott) lépték alapján. A pozitív hajlítónyomatékokat felfelé, a negatív hajlítónyomatékokat lefelé mérjük föl, bár néha a függőleges tengely irányítottsága fordított, ezért mindig oda kell figyelni az előjelekre, melyiket merre mérjük.

Utolsó lépésként ezeket a pontokat egy-egy egyenes szakasszal összekötjük (44. ábra).



44. ábra



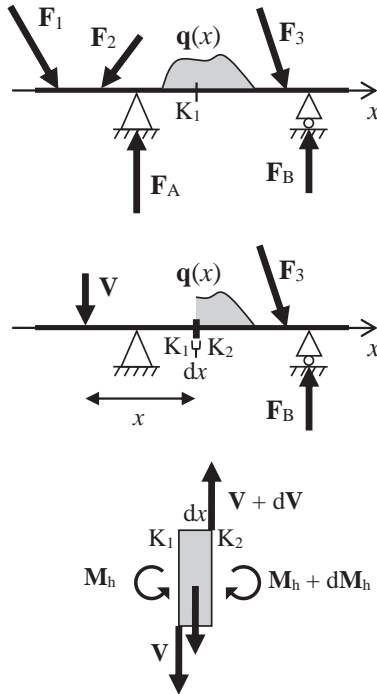
### 7.2.4. A Zsuravszkij-tétel

Miért egyenes szakasszal kötjük össze?

Ezt kétféle módon is meg lehet indokolni. Először induljunk el az  $F_{1,y}$  erő-től. Ennek támadáspontjában az általa kifejtett hajlítónyomaték 0. Jobbra haladva az  $F_{1,y}$  erőnek az egyes keresztmetszetekre kifejtett hajlítónyomatéka egyenesen arányos az  $F_{1,y}$  erő támadáspontjának a kérdéses keresztmetszettől mért távolságával, hiszen a hajlítónyomaték képletében  $F_{1,y}$  állandó, a távolság pedig lineárisan növekszik. Ennek a lineáris összefüggésnek a grafikus megjelenítődése az, hogy a hajlítónyomaték két koncentrált erő között egy lineáris függvény szerint változik.

A második magyarázata a lineáris függésnek az a körülmény, hogy ennek a tartónak az erőviszonyai egy sokkal általánosabb összefüggésnek a speciális esete.

Vegyünk egy tetszőleges kéttámaszú tartót, amelyet terheljen(ek) koncentrált erő(k) és tetszőleges függvény szerint változó  $q(x)$  megoszló erőrendszer (45. ábra). Vegyünk fel egy  $K_1$  keresztmetszetet a két alátámasztás között az általánosság kedvéért úgy, hogy a megoszló erőrendszer hasson  $K_1$ -re is. Jelöljük a  $K_1$  keresztmetszet baloldali kényszerítől való távolságát  $x$ -szel! Helyettesítsük a megoszló erőrendszer  $K_1$ -től balra eső részét a megfelelő koncentrált erővel, majd ezt és a  $K_1$ -től balra levő koncentrált erőket (illetve azok  $y$  irányú komponenseit) azok eredőjével, amelyet jelöljünk  $V$ -vel. Jelöljük a  $V$  erő  $K_1$ -től való távolságát  $x$ -szel. Ekkor áthelyezve a  $V$  erőt  $K_1$ -be, azt kapjuk, hogy  $K_1$ -et egy  $V$  nagyságú nyíróerő és egy  $xV = M_h$  hajlítónyomaték terheli.



45. ábra

Vizsgáljuk a tartó egy  $dx$  széles szeletét, amelyet balról a  $K_1$ , jobbról egy  $K_2$  keresztmetszet határol. Mivel  $dx \neq 0$ , ezért a  $K_2$ -t terhelő nyíróerő és hajlítónyomaték nem egyeznek meg a  $K_1$ -et terhelőkkel, hanem azoktól egy kicsit különböző  $V + dV$  és  $M_h + dM_h$  nagyságúak. A kivágott rúdelem kis hosszából következően a rajta levő megoszló erőrendszer nagyságát konstans  $q$ -nak tekinthetjük.

A tartó egyensúlyából következik, hogy nem csak egésze, hanem minden része is egyensúlyban van. Felírhatjuk tehát a  $K_2$  keresztmetszetre:

$$(76) \quad M_{K_2} = 0 = M_h - (M_h + dM_h) + Vdx + qdx \frac{dx}{2}$$

Az utolsó tagot elhanyagolhatjuk, mivel  $(dx)^2$  másodrendűen kicsi („nagyon kicsi a négyzetén”). Rendezve kapjuk:

$$(77) \quad \frac{dM_h}{dx} = V$$

Ez a *Zsuravszkij-tétel*<sup>2</sup>, amely azt mondja ki, hogy az adott keresztmetszeten fellépő nyíróerő a hajlítónyomaték hely szerinti deriváltja.

Ha az adott keresztmetszetbeli nyíróerő a keresztmetszet egyik oldalán levő erők összege, akkor ott, ahol nem hat erő a tartóra, a nyíróerőábra konstans függvény szerint halad. A konstans függvény egy lineáris függvény deriváltja, azaz a Zsuravszkij-tétel alapján a hajlítónyomatéki ábrának itt lineáris függvény szerint kell változnia.

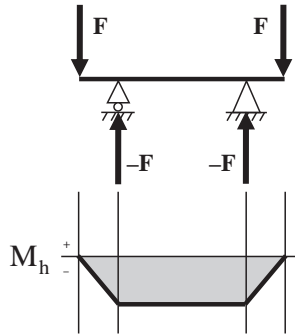
### 7.2.5. A veszélyes keresztmetszet

Tartó veszélyes keresztmetszete az a keresztmetszet, ahol a tartót a legnagyobb hajlítónyomaték terheli.

Koncentrált erőkkel terhelt tartók esetében veszélyes keresztmetszet valamelyik erő hatásvonalában biztosan található.

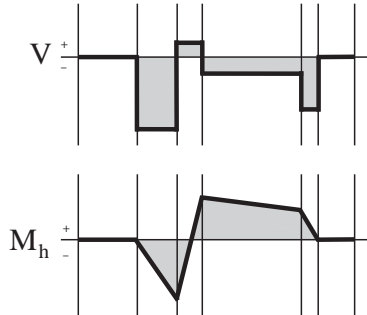
Azonban olyan keresztmetszetekre is hathat ezzel az értékkel azonos nagyságú hajlítónyomaték, ahol semmilyen erő nem hat a tartóra. A 46. ábrán látható szimmetrikus tartó esetében például mindkét kényszerben egy, a terhelő  $\mathbf{F}$  erőkkel ellentétes irányú, de azonos nagyságú reakcióerő ébred. Ezek hatásvonalán található veszélyes keresztmetszet, mert itt a hajlítónyomaték-függvénynek maximuma van. De ez csak egy lokális maximum, hiszen a két kényszer között mindenhol azonos nagyságú a hajlítónyomaték: itt a hajlítónyomaték-függvény konstans. Azaz a tartónak minden keresztmetszete veszélyes keresztmetszet a két kényszer között.

<sup>2</sup> Dmitrij Ivanovics Zsuravszkij, Дмитрий Иванович Журавский (1821–1891), orosz mérnök



46. ábra

A Zsuravszkij-tétel a veszélyes keresztmetszet meghatározását is egyszerűsíti: ahol a nyíróerőábra metszi a nullvonalat, ott a hajlítónyomatéki ábrának szélsőértéke kell, hogy legyen, hiszen ahol a deriváltfüggvény nulla értéket vesz fel, ott az eredeti függvénynek szélsőértéke van. Természetesen ez a szélsőérték nem feltétlenül globális, ahogy azt a 42. és 44. ábrák összevetéséből is láthatjuk (47. ábra). Ez a tulajdonság később még nagy segítségünkre lesz abban, hogy bonyolultabb szerkezeteknél is meg tudjuk határozni a veszélyes keresztmetszet helyén túl az ott fellépő hajlítónyomatékokat is.



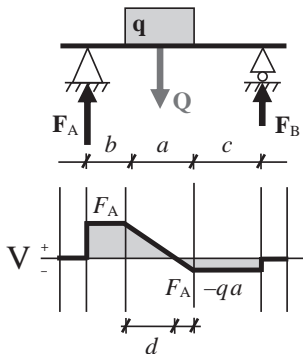
47. ábra

### 7.3. Megoszló erőrendszerrel terhelt kéttámaszú tartó

Bár egy tartó önsúlya egy teljes hosszán ható megoszló erőrendszernek felel meg, ezt el szoktuk hanyagolni, ha a rá ható egyéb erőhatások mellett nem jelentős. Ha ez igaz, akkor egy lefelé (negatív  $y$  irányba) mutató  $q$  megoszló erőrendszerrel  $a$  hosszon terhelt kéttámaszú tartó kevés kivételtől eltekintve a koncentrált erőknél megismert módszerek alapján könnyen kezelhető. Szorítkozzunk most a tartó mentén konstans nagyságú megoszló erőrendszerekre.

#### 7.3.1. Megoszló erőrendszer nyíróereje

Ha a tartó azon részén, amelyen a megoszló erőrendszer hat, nem hat koncentrált erő, akkor a megoszló erőrendszert a megfelelő koncentrált erővel helyettesítve a tartó reakcióerői számolhatók (48. ábra).



48. ábra

A nyíróerőábrán a megoszló erőrendszer két szélső pontja a lényeges, amelyek ismeretében már a teljes ábrát fel tudjuk rajzolni. Tegyük fel, hogy a bal oldali végpontban kiszámoltuk a nyíróerő nagyságát, legyen ennek értéke  $F$ . A megoszló erőrendszer az adott  $a$  távolságon  $qa$  nagyságú koncentrált erőnek felel meg. A megoszló erőrendszer jobb oldali végpontjában tehát a nyíróerőt úgy számolhatjuk, ha  $F$ -ből ezt kivonjuk:  $F - qa$ . Mivel a megoszló erőrendszer két végpontja közötti keresztmetszetek esetében a tartó adott keresztmetszettől balra található erők összegnagysága a távolsággal

lineárisan változik (a  $qa$  szorzatban  $q$  állandó és  $a$  a lineárisan változó távolság), a kiszámolt  $F$  és  $F - qa$  értékeknek megfelelő pontokat egy egyenes szakasszal kötjük össze.

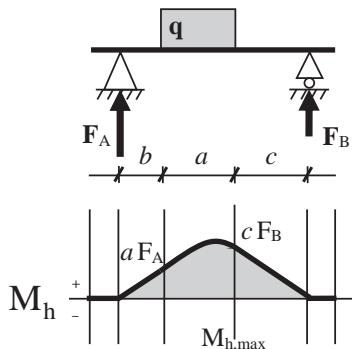
A 48. ábra példájánál maradva, az is meghatározható, hol metszi a nyíróerőábrán a megoszló erőrendszerhez tartozó ferde szakasz a nulltengelyt. Ehhez felhasználjuk, hogy a ferde szakasz két hasonló háromszöget hozott létre, ugyanis belső szögei azonosak, hiszen egy-egy szögük derékszög, egy-egy szögük váltószög, egy-egy szögük csúcshög. Az egyik magassága  $F_A$ , alapja  $d$ , a másik magassága  $F_A - qa$ , alapja  $a - d$ , amelyekkel felírható a

$$(78) \quad \frac{F_A}{d} = \frac{F_A - qa}{a - d}$$

egyenlet, amelyből az egyetlen ismeretlen,  $d$ , a zérushely pozíciója kifejezhető. Ebben a távolságban lesz a veszélyes keresztmetszet.

### 7.3.2. Megoszló erőrendszer hajlítónyomatéka

A 49. ábrán látható a hajlítónyomatéki ábra. Itt mindössze a megoszló erőrendszer két végpontjában kell kiszámolni a tőlük balra, illetve jobbra levő erők hajlítónyomatékát, és ezt a két pontot egy másodfokú parabolával összekötni. Másodfokúval, hiszen a (77) egyenlet alapján itt egy lineáris függvény integráljának kell megjelennie, ami kvadrátikus.



49. ábra

Szükséges azonban, hogy az első- és a másodfokú szakaszok folytonosan menjenek át egymásba. Ez is a nyíróerőábra függvénymenetéből következik: mivel a nyíróerőábrának a megoszló erőrendszer bal oldali végpontjában a jobb és bal oldali határértékei azonosak, primitív függvényének (ami a hajlítónyomatéki ábra) ebben a pontban nem lehet sem szakadása (ugrása), sem törése. Visszafelé gondolkodva: a nyíróerőábra, a deriváltfüggvény, azaz az eredeti függvény meredekségét mutató függvény csak akkor lesz egy pontban folytonos, ha az eredeti függvénynek ebben a pontban nincs sem szakadása (ugrása), sem törése. Ugyanez az érvelés igaz a megoszló erőrendszer jobb oldali végpontjára is.

A (78) egyenletből számított  $d$  pozícióban a nyíróerőábrának zérushelye van, itt a hajlítónyomatéki ábrának (lokális) szélsőértéket kell felvennie, ami esetünkben a globális szélsőérték is, a maximális hajlítónyomaték értéke is kiszámítható:

$$(79) \quad M_{h,\max} = (b+d)F_A - \frac{d}{2}dq = (a-d+c)F_B - \frac{a-d}{2}(a-d)q$$

## 7.4. Vegyes terhelésű kéttámaszú tartó

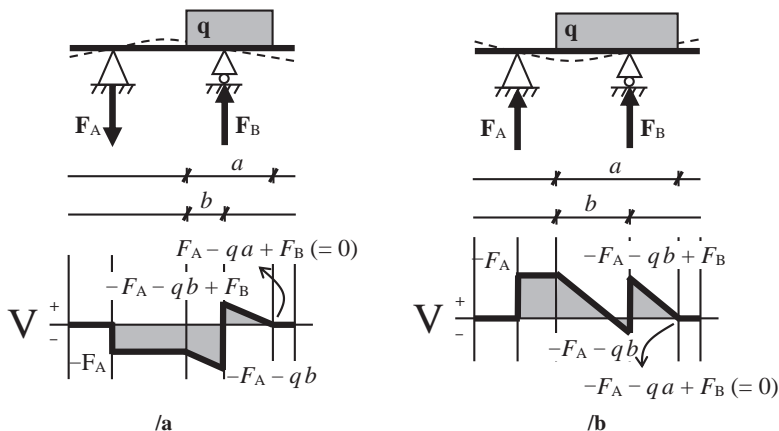
Ha egy tartóra koncentrált erő(k) és megoszló erőrendszer(ek) is hat(nak), a tartót vegyes terhelésűnek nevezzük. Ha koncentrált erő támadáspontja nem esik megoszló erőrendszer támadási felületére, a megoszló erőrendszert a megfelelő koncentrált erővel helyettesítve a tartó az eddig elmondottak alapján könnyen számítható.

### 7.4.1. Vegyes terhelésű kéttámaszú tartóra ható nyíróerők

Ha a tartó azon  $a$  hosszúságú részén, ahol a  $q$  megoszló erőrendszer hat, hat egy  $G$  koncentrált erő is (akár külső erő, akár valamelyik kényszerben ébredő reakcióerő), a nyíróerőábrán lesz egy szakadás (ugrás) a megoszló erőrendszert jellemző ferde lineáris szakaszon a koncentrált erő támadáspontjánál. Ennek az ugrásnak a mértéke megegyezik a koncentrált erő ( $y$  irányú komponensének) nagyságával (és irányával). Azaz ha a megoszló erőrendszer bal oldalán a nyíróerő  $F$ , akkor jobb oldalán  $F - qa \pm G$ , a  $G$  erő irányától függően.

Ha a  $\mathbf{G}$  koncentrált erő támadáspontja az  $a$  távolságon megoszló erőrendszer bal oldali végétől  $b$  távolságra van, akkor a nyíróerő értéke a megoszló erőrendszer bal oldali végétől a támadáspontig lineárisan  $F$ -ről  $F - qb$ -re csökken, a támadáspontban  $F - qb$ -ről  $F - qb \pm G$ -re ugrik ( $\mathbf{G}$  irányától függően), majd innen újra lineárisan  $F - qa \pm G$ -re csökken.

Az 50. ábra példáján  $\mathbf{G} = \mathbf{F}_B$  a görgőn fellépő reakcióerő, de a reakcióerők iránya függ a megoszló erőrendszer pontos támadási felületének pontos helyzetétől, ezért mindig meg kell őket pontosan határozni. Ha ugyanis  $b < a - b$ , akkor az  $\mathbf{F}_A$  reakcióerő lefelé mutató lesz (50/a ábra), ha viszont  $b > a - b$ , akkor felfelé mutató (50/b ábra).



50. ábra

Ez intuitívan is kitalálható úgy, hogy elképzeljük, mi lenne, ha a tartó nem merev, hanem szilárd test lenne. Milyen lenne ekkor a deformációja? Gondoljunk a tartóra a görgő környezetében úgy, mint egy mérleghintára, és hasonlíts rá a  $q$  megoszló erőrendszer. Ha ennek nagyobb része hat a görgőtől balra, akkor a tartó közepe lehajlik, azaz a csuklónak egy felfelé mutató erővel kell ezt a lehajlást kompenzálnia. Ha viszont a görgőtől jobbra hat a nagyobb része, akkor a görgőtől balra eső rész nem tudja ezt a hajlítóhatást kompenzálni, és a két kényszer között a rúd felfelé hajlik, azaz a csuklónak „lefelé kell húznia” a tartót, azaz egy függőlegesen lefelé mutató erőt kell



kifejtenie a tartóra. Ezek a hipotetikus deformációk az 50. ábrán szaggatott vonallal vannak ábrázolva.

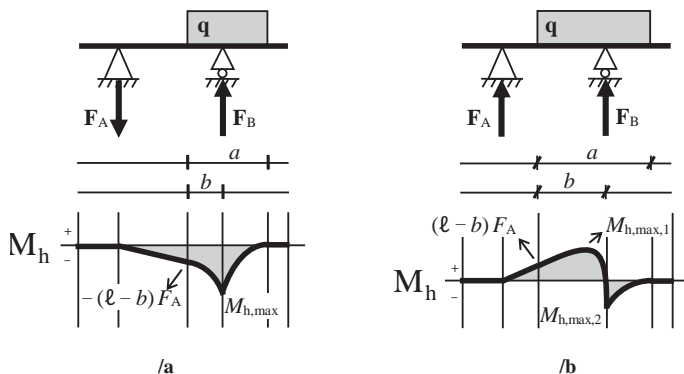
A nyíróerőábrának tehát egy vagy két zérushelye lesz: vagy csak az  $F_B$  erő támadáspontjánál, vagy a (78) egyenlet alapján meghatározható helyen is. Ezek lesznek tehát a hajlítónyomatéki ábra lokális szélsőérték-helyei, és az egyik lesz a veszélyes keresztmetszet helye.

### *7.4.2. Vegyes terhelésű kéttámaszú tartóra ható hajlítónyomatékok*

A hajlítónyomatéki ábra egyes szakaszai egymáshoz képesti menetének pontos felrajzolásához nagy segítséget nyújt a nyíróerőábra.

Balról a megoszló erőrendszer bal oldali végpontjáig a függvény lineáris, előjele a 43. ábra alapján meghatározható. Jobbról az  $F_B$  reakcióerő támadáspontjáig parabola. Ennek jobb oldali végpontjára is igaz, amit a deriváltfüggvény folytonosságáról a 7.3.2. alfejezetben elmondtunk, azaz itt nem  $\rangle$  alakú lesz a függvény menete, hanem  $($  alakú, hiszen 0-ról infinitezimális növekménnyel indul a növekedése a megoszló erőrendszer támadásfelületénél. A megoszló erőrendszer bal oldali végpontjában szintén nincs sem szakadása, sem töréspontja a függvénynek, hiszen ott koncentrált erő nem hat, így a meredekségnek folytonosan kell változnia.

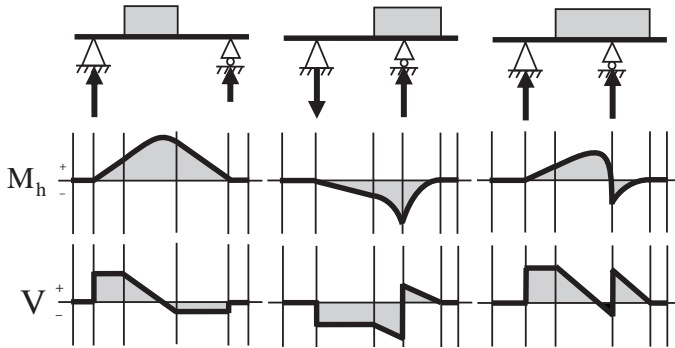
Ezzel szemben az  $F_B$  reakcióerő támadáspontjában a nyíróerőfüggvény ugrik, ráadásul negatívból pozitívba. Ebből következik, hogy a hajlítónyomatéki ábrának itt meredekséget kell váltania, azaz a függvénynek töréspontja lesz. Ez azt jelenti, hogy mivel jobbról balra haladva eddig a pontig a függvény monoton csökkenő volt, itt monoton növekedővé kell változnia. Ugyanakkor alakjának továbbra is másodfokú parabolának kell maradnia, valamint a megoszló erőrendszer bal oldali végpontjába folytonosan kell érkeznie.



51. ábra

Ezt láthatjuk az 51. ábrán: míg az /a esetben ez viszonylag egyszerűen megrajzolható, a /b esetben a függvénynek ezen a szakaszon előjelet is kell váltania, és az  $50/b$  nyírőerőábra második zérushelyénél a hajlítónyomatéknak a második lokális szélsőértékét is fel kell vennie. Míg tehát az /a esetben a veszélyes keresztmetszet helye egyértelmű, és így a hajlítónyomaték ott felvett értéke könnyen számolható, a /b esetben mindkét lokális szélsőérték konkrét értékét ki kell számítani, hogy meg tudjuk mondani, melyik a veszélyes keresztmetszet, hiszen az függ a tartó méreteitől és a terheléstől is.

A 48–51. ábrákat itt egyben is láthatjuk, szemléltetendő a Zsuravszkij-tételt: a nyírőerőábra nulla, konstans és lineárisan változó szakaszainak a hajlítónyomatéki ábrán nulla, lineáris és másodfokú függvényalakok felelnek meg; ahol a nyírőerőábrának ugrása van, ott a hajlítónyomatéki ábrának töréspontja. De lehet-e a hajlítónyomatéki ábrán szakadási pont úgy, hogy az a nyírőerőábrán ne jelenjen meg, mert a szakadási pont jobb és bal oldalán a hajlítónyomatéki függvény meredeksége azonos?

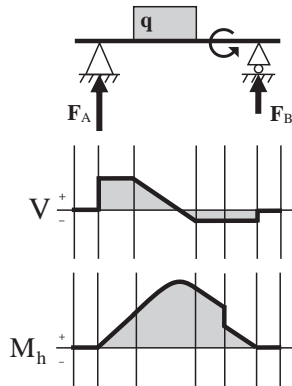


A 48–51. ábrák egyben

## 7.5. Koncentrált forgatónyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó

Amennyiben az előzőekben tárgyaltakon túl egy koncentrált forgatónyomaték is van a tartón, ezt a reakcióerők számításánál figyelembe kell venni. Mivel ez már eleve egy forgatónyomaték-jellegű mennyiség, egy adott keresztmetszetre (jelen esetben a két kényszerre) felírt  $\sum M_i = 0$  egyenletben a megfelelő előjellel (lásd 43. ábra) figyelembe kell venni egy egyszerű additív tagként (azaz már semmilyen távolságjellegű mennyiséggel nem kell beszorozni).

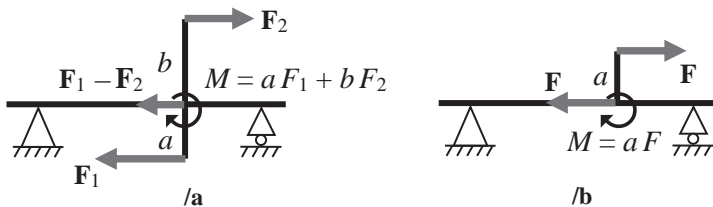
A koncentrált forgatónyomaték jelenléte jellegbeli változást a hajlítónyomatéki ábrán fog csak okozni. Míg a nyíróerőábrának csak az arányai változnak meg hatására, a hajlítónyomatéki ábrán ugrást okoz a támaszpontjában (a megfelelő előjellel). Emiatt a hajlítónyomatéki ábra függvénye az eddigiektől eltérően nem lesz folytonos, hanem a koncentrált forgatónyomatéknál szakadási pontja lesz (52. ábra).



52. ábra

Honnan származhat koncentrált forgatónyomaték? Gyakran előfordul, hogy a tartóhoz keresztirányban egy függőleges rudat mereven kell rögzíteni (például hegesztéssel). Ha erre a rúdra az 53/a ábrán láthatóan úgy hatnak erők, hogy  $aF_1 = bF_2$ , akkor pusztán egy koncentrált forgatónyomaték hat a tartóra.

Ha ez az egyenlőség nem igaz, akkor egy eredő erő is megjelenik a tartóban, vele párhuzamosan, azaz egy nyomó- vagy húzóerő fog hatni a tartóra, amely a csuklónál kompenzálódik. Az 53/b ábra ennek szélsőséges esete, amikor csak az egyetlen  $F$  erő hat a merőleges rúdra. Ennek a rúd tengelyében fellépő, azonos nagyságú, de ellentétes irányítottságú ellenereje az előbbi esethez hasonlóan húzásra vagy nyomásra is terheli a tartót. A  $+F -F$  erőpár pedig a merőleges rúd érintkezési pontjában létrehozza a koncentrált forgatónyomatékot.



53. ábra

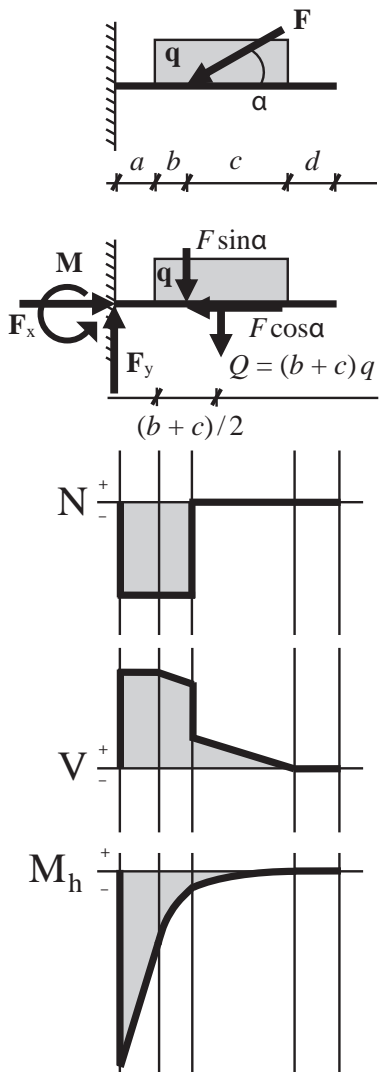


## 8. Egyik végén befogott tartó

Ha egy tartót az egyik végén befalazunk, az megakadályozza a tartó vízszintes és függőleges elmozdulását, valamint elfordulását is a befogás helyén. Ez három ismeretlen reakciókomponenst jelent, azaz az úgynevezett egyik végén befogott tartó (*cantilever beam / fixed beam*) statikailag határozott. Ha a tartóhoz még kapcsolódik kényszer (például a végén egy görgő), a rendszer már statikailag határozatlan lesz a háromnál több reakciókomponens miatt, és csak szilárdságtani megfontolások segítségével lesz megoldható.

A statikai határozottság miatt bármilyen síkbeli erőrendszerrel terheljük is a tartót, a reakciók, amelyek mindegyike a falban ébred, a (22)–(24) egyenletek alapján meghatározhatók. A falban ébredő vízszintes és függőleges irányú reakcióerő nagysága megegyezik a tartóra ható erők vektori összegével, irányítottsága pedig ellentétes azokkal. Hasonlóan, a tartóra ható hajlítónyomatékokkal azonos nagyságú, de ellentétes irányítottságú reakció-hajlítónyomaték ébred a falban.

Hasson az 54. ábrán látható tartóra egy  $\mathbf{q}$  megoszló erőrendszer és  $\alpha$  szögben egy  $\mathbf{F}$  koncentrált erő. A falban ébredő vízszintes és függőleges reakcióerőket  $\mathbf{F}_x$ -szel és  $\mathbf{F}_y$ -nal, a forgatónyomatékot  $\mathbf{M}$ -mel jelöljük.



54. ábra

Az  $\mathbf{F}$  erőt merőleges komponensekre bontva megkapjuk az  $F_x$  nagyságát:  
 $F_x = F \cos \alpha$ .

A  $b+c$  hosszú vonalon ható  $\mathbf{q}$ -t helyettesíthetjük egy  $Q = (b+c)q$  nagyságú koncentrált erővel a támadási vonal felénél,  $(b+c)/2$ -nél. Ezekből kiszámíthatjuk  $F_y$  nagyságát:

$$(80) \quad F_y = F \sin(\alpha) + Q$$

A fal által kompenzálendő hajlítónyomatéknak a függőleges irányú erőknek a falnál okozott hajlítónyomatékával kell azonos nagyságúnak, de ellentétes irányúnak lennie:

$$(81) \quad M = -\left\{-(a+b)F \sin(\alpha) - \left[a + (b+c)/2\right]Q\right\}$$

Az igénybevételi ábrák közül a nyomóerő- és a nyíróerőábra felrajzolása a korábban elmondottak alapján egyértelmű. A hajlítónyomatéki ábra pontos felrajzolásához azonban érdemes a következőkre figyelni. A szabad végen a hajlítónyomaték mindig nulla. Érdemes a lényeges pontokban a hajlítónyomatékokat jobbról balra haladva felvenni, azaz mindig jobb oldali hajlítónyomatékokat számolni. Az  $\mathbf{F}$  erő támadáspontjában a hajlítónyomatéki függvény folytonos, mivel bár a nyíróerőábrának ebben a pontban szakadása van, a szakadási pont jobb és bal oldalán a nyíróerő-függvény meredeksége azonos. Ugyanakkor az  $\mathbf{F}$  erő támadáspontjában a hajlítónyomatéki függvénynek töréspontja van, mivel itt a nyíróerőábrának szakadási pontja van (a falhoz közelebbi részen a parabola meredekebb). Ezzel szemben a megoszló erőrendszer bal oldali végénél a nyíróerőábra függvényében csak egy törés van, maga a függvény folytonos, ezért a hajlítónyomatéki ábra is azonos meredekséggel megy át a megoszló erőrendszernek megfelelő másodfokú parabolából a terheletlen szakaszt jellemző lineáris függvénybe.





## 9. Síkbeli összetett szerkezetek

A gyakorlatban sokszor alkalmaznak olyan síkbeli szerkezeteket, amelyek kényszerekkel, általában csuklókkal összekapcsolt rudakból állnak. A „síkbeli” jelző itt azt jelenti, hogy a rudak egy síkban vannak. Ha egy ilyen szerkezet csak a csuklóknál kap terhelést, vagyis a rudakban csak rúdírányú erők ébrednek (azaz statikai rudak), akkor rácsos szerkezetnek nevezzük. Ha máshol is kap terhelést, akkor csuklós szerkezetéről beszélünk, amelyben a rudak nem statikai rudak. Bár ez a két szerkezet a rudak igénybevétele szempontjából jelentős eltéréseket mutat, mindkét esetben fel tudjuk írni a (22)–(24) három egyensúlyi egyenletét, amelyekből három reakciókomponenst határozhatunk meg. Ha az ismeretlen reakciókomponensek száma éppen 3, a szerkezet statikailag határozott; ha kisebb, mint 3, akkor statikailag túlhatározott; ha pedig nagyobb, mint 3, akkor statikailag határozatlan.

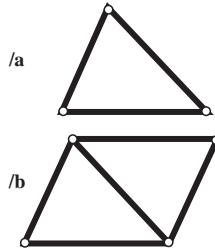
### 9.1. Rácsos szerkezetek

A rácsos szerkezeteket (*truss*) háromszögekből, három-három súrlódásmentes csuklóval összekapcsolt merev rúdból építjük fel. A háromszögek alkalmazásának célja, hogy a szerkezet alaktartó legyen, azaz semmilyen erő hatására ne változtassa meg az alakját. Bár a rudakat a valóságban nem csuklókkal, hanem szegeccseléssel vagy hegesztéssel szokták összekapcsolni, a következőkben ezzel a közelítéssel fogunk élni. Egyszerűsége ellenére az ebből a modelltől kapott eredmények nagyon jó egyezést mutatnak a sokkal bonyolultabb, ezért nehezebben számolható, de pontosabb modellekből kapott eredményekkel.

A rudakat jellemzően számokkal, a csuklókat (csomópontokat) nagybetűkkel szoktuk jelölni.

Egy rácsos szerkezetet elméletben úgy építhetünk fel, hogy egy kiindulási háromszöghöz (55/a ábra) újabb rudakat és csuklókat adunk. A rudak számát  $r$ -rel, a csuklók számát  $cs$ -vel jelölve ez azt jelenti, hogy először  $r = 3$  és  $cs = 3$ . Az első lépésben két rudat és egy ezeket összekapcsoló

csuklót kell hozzáadnunk a szerkezethez, hogy két háromszöget kapjunk (55/b ábra), így  $r = 5$  és  $cs = 4$  lesz.

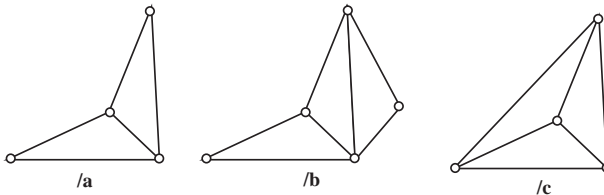


55. ábra

A statikailag határozott szerkezetekre igaz, hogy  
(82)  $r = 2cs - 3$

Megvizsgálva ezt a két említett szerkezetet, az találjuk, hogy a (82) összefüggés teljesül rájuk:  $3 = 2 \cdot 3 - 3$  és  $5 = 2 \cdot 4 - 3$ . Hozzá kell azonban tenni, hogy ez a statikai határozottságnak csak szükséges, de nem elégséges feltétele, azaz léteznek olyan, statikailag nem határozott szerkezetek, amelyekre az összefüggés fennáll.

Ennél a pontnál két lehetőségünk van tovább bővíteni a szerkezetet. Az 56/a ábrán látható szerkezet ekvivalens az 55/b ábrán láthatóval. Ehhez két rudat és egy ezeket összekapcsoló csuklót adva az 56/b ábra szerint  $r = 7$  és  $cs = 5$  lesz. Ezekkel az értékekkel felírva a (82) összefüggést, azonosságot kapunk. Azonban az 56/c ábrán látható módon pusztán egy rúddal bővítve a szerkezetet  $r = 6$  és  $cs = 4$  lesz, amely értékeket a (82) összefüggésbe behelyettesítve nem kapunk azonosságot,  $6 > 2 \cdot 4 - 3$ . Ez azt jelenti, hogy ez a szerkezet statikailag túlhatározott.

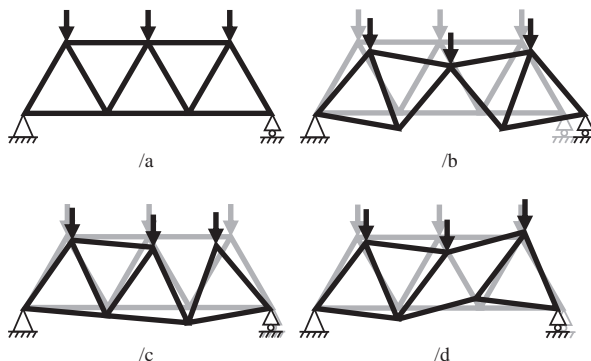


56. ábra

A rácsos szerkezetek számítása a szerkezet támasztóerőinek és az egyes rúdelemeknek a meghatározását jelenti. Mivel a szerkezet egyensúlyban van, a reakcióerőket általában a szerkezetre ható külső erőrendszer egyensúlyából határozzuk meg. Ekkor a rácsos szerkezetet egyetlen merev testnek tekintjük, és a rá ható külső erőket az eredőjükkel helyettesítve tudjuk számolni a támasztóerőket.

A rúdelemek számításakor azt használjuk fel, hogy az egyensúlyban levő rendszer minden részrendszere, azaz az egyes rudak is egyensúlyban vannak, vagyis minden rúd végén azonos nagyságú, de ellentétes irányítottágú erő hat. Mivel a rudak vagy húzottak, vagy nyomottak, és nem terheli őket sem nyírás, sem hajlítás, itt igénybevételi ábrákat sem készítünk.

Mivel a szerkezet statikailag határozott, egy gondolat kísérlet segítségével is kitalálhatjuk, hogy egy rúd húzott vagy nyomott: ha az adott rudat kivennénk a szerkezetből, távolodnának-e a végein található csuklók egymástól vagy közelednének egymáshoz? Ha távolodnának, akkor a rúd húzott, ha közelednének, akkor nyomott. Ez alapján az 57. ábrán látható rácsos szerkezetből három különböző rudat kivéve megállapíthatjuk, hogy a /b esetben a rúd húzott volt, a /c és a /d esetben nyomott.



57. ábra

Az olyan rudat, amelyre sem húzó-, sem nyomóerő nem hat, vakrúdnak nevezzük.

Az egyes csuklók jelölésére használt kis kört el szokás hagyni, a következőkben mi is így teszünk. Két rúd találkozásához automatikusan csuklót képzelünk, és úgy számolunk.

### 9.1.1. A csomóponti módszer

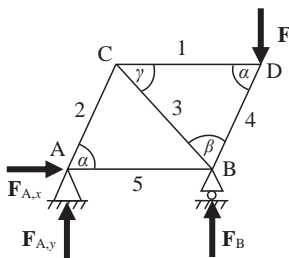
A rácsos szerkezet egyensúlyából következik, hogy minden csukló is külön-külön egyensúlyban van, azaz az egy csuklóban összefutó erők egyensúlyi erőrendszert alkotnak. Ezeket az egyensúlyi egyenleteket (megfelelő sorrendben) felírva kiszámíthatjuk a szerkezetben ébredő erőket. A módszert csomóponti módszernek (*method of joints*) nevezzük.

A számolás során lényeges lesz megkülönböztetni a csuklókból az egyes rudakra ható erőket és az ezek hatására a rudakban ébredő reakcióerőket, amelyek a statika IV. alaptételének megfelelően visszahatnak a csuklókra. Kapcsolódjon például az 1-es rúd az A és a B jelű csuklókhöz. Jelöljük az A csukló által az 1-es rúdra kifejtett erőt  $F_{A1}$ -gyel, az 1-es rúd által az A csuklóra kifejtett erőt pedig  $F_{1A}$ -val. A statika IV. alaptétele alapján igaz az  $F_{A1} = F_{1A}$  összefüggés. Ugyanakkor az egyes rudak egyensúlyából következően amekkora erővel hat az 1-es rúd az A csuklóra, ugyanakkora nagyságú, de ellentétes irányú erővel hat a B csuklóra:  $F_{1A} = F_{1B}$ .

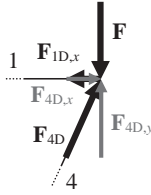
A rácsos szerkezet vizsgálatát csak olyan csuklónál kezdhetjük, amelyben csak két rúd fut össze. Emellett csak olyan csuklóra léphetünk tovább, amelynél az ismeretlen rúderők száma legfeljebb kettő. Ezek a feltételek egyszerű rácsos szerkezetekre mindig teljesülnek, azaz a csomóponti módszer használható.

#### 9.1.1.1. Számítás erők segítségével

Tekintsük az 58. ábrán látható egyszerű rácsos szerkezetet, amelynek ismerjük a szögeit (természetesen  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ). Látni fogjuk, hogy a rudak hosszának ismeretére nincs is szükség.



58. ábra



59. ábra

Induljunk ki a D csuklóból (59. ábra). Mivel az 1-es rúd csak vízszintes irányú erőt tud felvenni, a függőleges  $\mathbf{F}$  erővel azonos nagyságú, de ellentétes irányítottágú erő csak a 4-es rúdban léphet fel, azaz  $F_{4D,y} = F$ . Ez azonban a 4-es rúdban fellépő erőnek csak a függőleges komponense, és mivel a rúd  $\alpha$  szöget zár be a vízszintessel, azaz  $\pi/2 - \alpha$  szöget a függőlegessel, a rúd-irányú erőre igaznak kell lennie az

$$(83) \quad F = F_{4D,y} = F_{4D} \sin(\alpha)$$

összefüggésnek, amelyből

$$(84) \quad F_{4D} = \frac{F}{\sin(\alpha)}$$

Ebből számítható az  $\mathbf{F}_4$  erő vízszintes komponense is:

$$(85) \quad F_{4D,x} = F_{4D} \cos(\alpha) = \frac{F}{\sin(\alpha)} \cos(\alpha) = F \operatorname{ctg}(\alpha)$$

Ez utóbbi ellenerejének viszont meg kell jelennie az 1-es rúdon azonos nagysággal és ellentétes irányítottággal:

$$(86) \quad F_{1D,x} = F_{1D} = F_{4D,x}$$

amelynek értéke

$$(87) \quad F_{1D,x} = F \operatorname{ctg}(\alpha)$$

A kapott eredmények alapján elmondhatjuk, hogy mivel a 4-es rúd reakcióereje a csukló felé mutat, azaz a csukló nyomja a rúdat, ezért ez a rúd nyomott; míg az 1-es rúd reakcióereje a csuklótól elfelé mutat, azaz a csukló húzza a rúdat, ezért ez a rúd húzott.

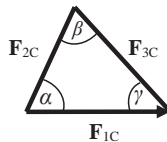
Lépünk tovább a C csuklóra. Erre három rúd reakcióereje hat:  $\mathbf{F}_{1C}$ ,  $\mathbf{F}_{2C}$  és  $\mathbf{F}_{3C}$  (amelyek természetesen megegyeznek a csukló által erre a három

rúdra gyakorolt erőnek, azaz a fordított indexű erővektoroknak  $-1$ -szerevével). A csukló egyensúlya miatt ezen három vektor vektori összegének nullvektornak kell lennie.

Az 1-es rúd húzza a D csuklót, ezért a C csuklót is húznia kell:

$$(88) \quad F_{1D,x} = F_{1D} = F_{1C} = F_{1C,x}.$$

Felrajzolva az 1-es, 2-es és 3-as rudak reakcióerőinek vektorháromszögét (60. ábra) az  $F_{1C}$  erő irányából ( $\rightarrow$ ) rögtön következik, hogy  $F_{2C}$ -nek ( $\swarrow$ ) és  $F_{3C}$ -nek ( $\nwarrow$ ) milyen irányúnak kell lennie, hogy a három vektor összege nullvektor legyen.



60. ábra

Ismerve egy háromszög belső szögeit és egy oldal hosszát, a másik két oldal hossza is meghatározható. Legegyszerűbb talán a szinusztételt használni:

$$(89) \quad \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{F_{3C}}{F_{1C}}$$

amelyben egy ismeretlen van:  $F_{3C}$ . Ennek komponensei az  $F_{3C,x} = F_{3C} \cos\gamma$  és az  $F_{3C,y} = F_{3C} \sin\gamma$  összefüggésekből határozhatók meg. Hasonlóan meghatározható az  $F_{2C}$  erő és komponenseinek nagysága.

Tudjuk, hogy a B görgő csak függőleges irányú erőt tud felvenni, azaz  $F_B$  biztosan függőleges irányú. Mivel az 5-ös rúd csak vízszintes irányú erőt tud felvenni, ezért a B csuklónál a 3-as és a 4-es rudak reakcióerői függőleges komponenseinek (mindkettő lefelé mutat) és az  $F_B$  erő összegének nullvektornak kell lennie:

$$(90) \quad F_{3B,y} + F_{4B,y} = F_B.$$

Hasonlóan az 5-ös rúd (jobbra mutató) reakcióerejének és a 3-as rúd (jobbra mutató) és a 4-es rúd (balra mutató) reakcióerői vízszintes komponensei összegének szintén nullát kell adniuk:

$$(91) \quad F_{3B,x} - F_{4B,x} + F_{5B,x} = 0$$

Ha ebből az egyenletből az  $F_{5B,x}$  ( $= F_{5B}$ ) erőre pozitív számot kapunk, akkor az jobbra mutat, míg ha negatív, akkor balra, ugyanis a jobbra mutató  $\mathbf{F}_{3B,x}$ -et és a balra mutató  $\mathbf{F}_{4B,x}$ -et ezzel az előjelkonvencióval írtuk be az abszolút értékeket tartalmazó egyenletbe.

Tolsó lépésben megoldva az A csuklónál levő függőleges és vízszintes irányú erők egyensúlyát, azaz az

$$(92) \quad F_{A,y} - F_{2,y} = 0$$

$$(93) \quad F_{A,x} + F_{5A} - F_{2,x} = 0$$

egyenleteket, ahol az  $F_{5A} = F_{5B}$  egyenlőséget használva  $F_{5A}$  negatív volta azt jelenti, hogy balra mutat, pozitív volta azt, hogy jobbra.

$F_{A,x}$ -re azonban a külső erők egyensúlya alapján biztosan nullának kell kijönnie. Mivel  $\mathbf{F}$  függőleges és  $\mathbf{F}_B$  (mivel görgőn fellépő reakcióerő) szintén csak függőleges lehet, ezért szükséges, hogy  $\mathbf{F}_A$  is függőleges irányú legyen, azaz ne legyen  $x$  irányú komponense.

Ezzel meghatároztuk a rácsos szerkezetre ható külső  $\mathbf{F}_A$  és  $\mathbf{F}_B$  erőket és az egyes rudakban fellépő belső erőket.

Csuklóról csuklóra, csomóponttól csomópontra haladva bármely rácsos szerkezetre hasonlóan meghatározhatók ezek az erők, bár a csuklók sorrendjének ügyes megválasztásával a számolás gyorsítható. Bár jelen példánál a C csuklóról az A csuklóra lépve meg tudtuk volna oldani a vízszintes erőkre felírt egyenletet, tudva, hogy  $F_{A,x} = 0$ , és így csak  $F_5$  lett volna ismeretlen.

Ha  $\mathbf{F}$ -nek lett volna vízszintes komponense is, az

$$F_A = \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2}$$

(94)

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{F_{A,y}}{F_{A,x}} \right)$$

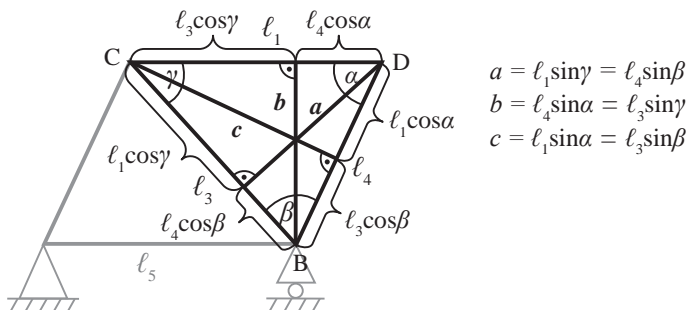
összefüggésekkel tudtuk volna  $\mathbf{F}_A$  nagyságát és vízszintes tengellyel bezárt szögét meghatározni.

### 9.1.1.2. Számítás forgatónyomatékok segítségével

Az 58. ábrán látható szerkezet számolásához használhatjuk a forgatónyomatékokra felírt egyenleteket is. Itt fontos az egyes rudak hosszának ismerete;



jelöljük az  $i$ -edik rúd hosszát  $\ell_i$ -vel. Emellett az egyes hatásvonalak csúcsoktól való távolságára is szükség van. Ezeket foglalja össze a 61. ábra, amelyen az  $\alpha$  szögből kiinduló magasságvonalat  $a$ -val, a  $\beta$  szögből kiindulót  $b$ -vel, a  $\gamma$  szögből kiindulót pedig  $c$ -vel jelöltük.



61. ábra

A külső erők egyensúlyát felhasználva, ismerve az 5-ös és 4-es rudak  $\ell_5$  és  $\ell_4$  hosszát, felírhatjuk az A pontra a (24) egyenletet:

$$(95) \quad \ell_5 F_B - (\ell_5 + \ell_4 \cos(\alpha)) F = 0$$

amelyből  $F_B$ , majd a (23) egyenlet alapján (azaz hogy a függőleges irányú erők összege 0)  $F_A$  számolható.

A szerkezet egyensúlya miatt a forgatónyomaték minden pontban nulla. Így például a D pontban is. Ha egy pontban nulla a forgatónyomaték, akkor az a 3.2. alfejezet alapján bármely pontból nézve is nulla. A D pont forgatónyomatékára a B pontból nézve felírhatjuk:

$$(96) \quad -\ell_4 \cos(\alpha) F + \ell_4 \sin(\alpha) F_{1D,x} + 0 \cdot F_4 = 0$$

ahonnan kapjuk  $F_{1D,x}$  értékét. Tudva, hogy  $F_{1C,x} = F_{1D,x}$ , hasonló egyenletet írhatunk fel a B pontból a C pontbeli forgatónyomatékra, amelyből  $F_{2C}$  meghatározható, hiszen  $F_{2C}$  hatásvonalának B ponttól való távolsága számítható:  $\ell_3 \sin \beta$ . A többi csomópontra a megfelelő pontból felírva a forgatónyomaték zérus voltát, a rudak reakcióerői egyesével meghatározhatók.

### 9.1.2. Az átmetsző módszer

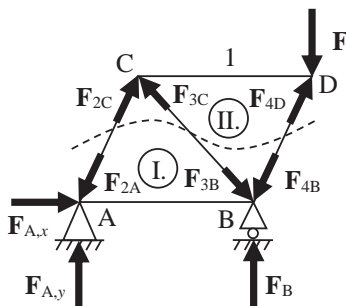
Egy másik módszer az 58. ábrán látható rácsos szerkezet megoldására az úgynevezett átmetsző módszer (*method of sections*). Ezt általában akkor alkalmazzuk, amikor nincs szükségünk a rácsos szerkezet összes rúdjában ébredő összes erő ismeretére, csak egyre vagy kettőre.

A módszer lényege, hogy a szerkezetet gondolatban két részre (I. és II.) vágjuk úgy, hogy legfeljebb három rudat vágunk ketté, köztük azt, amelyikben a rúderőt meg akarjuk határozni (lásd 62. ábra). A szerkezet egyensúlyából következik, hogy minden részrendszerre, azaz a két szétvágott rész is külön-külön egyensúlyban van. Ez azt jelenti, hogy

$$(97) \quad \mathbf{F}_{2C} + \mathbf{F}_{3C} + \mathbf{F}_{4D} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$(98) \quad \mathbf{F}_{2A} + \mathbf{F}_{3B} + \mathbf{F}_{4B} + \mathbf{F}_{A,x} + \mathbf{F}_{A,y} + \mathbf{F}_B = \mathbf{0}$$

vagyis a feladatot négy erő egyensúlyára vezettük vissza. Az át nem metsett rudakban, jelen példánkban az 1-es és az 5-ös rúdban ébredő erőket nem kell figyelembe venni, hiszen a bennük ébredő erők vektori összege  $\mathbf{0}$ .



62. ábra

#### 9.1.2.1. Megoldás Ritter-módszerrel

Az erők meghatározására két lehetőségünk van. Az egyik a Ritter-módszer alkalmazása (lásd 3.3.3. alfejezet), azaz olyan pontokra írjuk fel a (24) egyenlet alapján a forgatónyomatékokat, amelyekben két erő hatásvonala metszi

egymást, egy ismert és egy ismeretlen erő hatásvonala pedig nem megy át ezen a ponton. Így az ismeretlen erő meghatározható.

Az egyes hatásvonalak pontoktól való távolságai a rudak hosszainak és közszérszögének ismeretében szögfüggvényekkel könnyen számíthatók.

Tegyük fel, hogy pl. a 4-es rúdban ébredő  $\mathbf{F}_{4D}$  erőt akarjuk meghatározni. Ekkor az I-es részben fellépő erők segítségével felírhatjuk a forgatónyomatékokat a C pontra:

$$(99) \quad \ell_1 \sin(\alpha) F_{4D} - \ell_1 F + 0 \cdot F_{2C} + 0 \cdot F_{3C} = 0$$

amelyből  $F_{4D}$  meghatározható. Ha  $F_{4D}$  értékére negatív szám jön ki, akkor iránya valójában ellentétes azzal, mint ahogy a rajzon feltételeztük és ezért amilyen előjellel a (99) egyenletbe beírtuk.

Hasonló egyenletek írhatók fel a B és a D pontokra:

$$(100) \quad -\ell_1 \sin(\alpha) F_{2C} - \ell_4 \cos(\alpha) F + 0 \cdot F_{3C} + 0 \cdot F_{4D} = 0$$

$$(101) \quad -\ell_1 \sin(\alpha) F_{2C} - \ell_1 \sin(\gamma) F_{3C} + 0 \cdot F + 0 \cdot F_{4D} = 0$$

A (100) egyenletből  $F_{2C}$ , majd a (101) egyenletből  $F_{3C}$  meghatározható. A kapott pozitív előjel azt jelzi, hogy helyesen tételeztük fel az adott erő irányát, a negatív pedig, hogy irányítottága valójában ellentétes az ábrára rajzolt, feltételezett iránnyal.

### 9.1.2.2. Megoldás erők eredőjének számításával

A 62. ábrán az I. részre egy ismert nagyságú erő,  $\mathbf{F}$ , és három ismeretlen nagyságú erő:  $\mathbf{F}_{2D}$ ,  $\mathbf{F}_{3C}$  és  $\mathbf{F}_{4D}$  hat. Azonban mind a négynek ismerjük az irányát.

Helyettesítsük először  $\mathbf{F}_{2D}$ -t és  $\mathbf{F}_{3C}$ -t az eredőjükkel, amelyet jelöljünk  $\mathbf{F}_{23}$ -mal. Mivel a 2-es rúdban ébredő  $\mathbf{F}_{2D}$  erő és a 3-as rúdban ébredő  $\mathbf{F}_{3C}$  erő is a C csuklóra hat, ebbe a pontba pedig ezeken kívül csak az 1-es rúd fut be, szükséges, hogy eredőjük az 1-es rúd irányába essen. Ennek két oka is van.

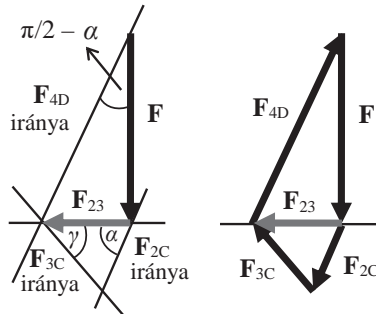
Egyrészt a rudak statikai rudak, azaz a harmadik, C pontba futó erő, amely a C pontban az  $\mathbf{F}_{2D}$  és az  $\mathbf{F}_{3C}$  erőkkel tart egyensúlyt, csak ebben a rúdban ébredhet, azaz ezzel a rúddal párhuzamosnak kell lennie (mivel a C pontban külső erő nem hat).

Másrészt az  $\mathbf{F}_{2D}$  és a  $\mathbf{F}_{3C}$  erők eredőjének hatásvonala keresztül kell menjen a D ponton, ellenkező esetben az  $\mathbf{F}_{23}$ , az  $\mathbf{F}_{4C}$  és az  $\mathbf{F}$  erők eredőjének nem  $\mathbf{0}$  lenne a forgatónyomatéka (lásd 3.3. alfejezet).

Ismerjük tehát az  $\mathbf{F}_{23}$  erő irányát. Az erők nagyságának meghatározásához először vegyünk fel egy vízszintes irányú tengelyt, amelyre az  $\mathbf{F}_{23}$  erőnek esnie kell, majd ehhez képest irányhelyesen (azaz jelen példában függőlegesen) mérjük fel az  $\mathbf{F}$  erőt egy (általunk felvett) erőlépték alapján. Húzva az  $\mathbf{F}$  erő vektorának másik végpontjában egy egyenest az  $\mathbf{F}_{4D}$  erő hatásvonalával párhuzamosan, azaz úgy, hogy az egyenes az  $\mathbf{F}$  erő vektorával  $\pi/2 - \alpha$  szöget zárjon be, megkapjuk az  $\mathbf{F}_{4D}$  és az  $\mathbf{F}_{23}$  erők vektorait (63. ábra). Nagyságuk szögfüggvényvel számolható:

$$(102) \quad F_{4D} = \frac{F}{\cos(\pi/2 - \alpha)} = \frac{F}{\sin \alpha}$$

$$(103) \quad F_{23} = F \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = F \operatorname{ctg}(\alpha)$$



63. ábra

Ha az  $\mathbf{F}_{23}$  erő két végpontjában párhuzamosot húzunk az  $\mathbf{F}_{2C}$  és az  $\mathbf{F}_{3C}$  erők hatásvonalaival, ezek egy pontban metszeni fogják egymást, mellyel megkaptuk ezen erők vektorait is. Mivel tudjuk, hogy  $\mathbf{F}_{3C}$  hatásvonala  $\gamma$  szöget zár be a vízszintessel,  $\mathbf{F}_{2C}$  hatásvonala pedig  $\alpha$  szöget, ezért ezek nagysága is számítható: függőleges komponensük nagysága megegyezik, vízszintes komponenseik összege pedig  $F_{23}$ . Felírva ezt a két egyenletet, egy kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk  $F_{2C}$ -re és  $F_{3C}$ -re, amely egyértelműen megoldható:

$$(104) \quad \left. \begin{aligned} F_{2C} \sin \alpha &= F_{3C} \sin \gamma \\ F_{2C} \cos \alpha + F_{3C} \cos \gamma &= F_{23} \end{aligned} \right\}$$

Ha a rácsos szerkezet másik rúderőit akarjuk meghatározni, másik három rudat kell kettévágni: az 1-es vagy az 5-ös rúd erőinek meghatározásához például az 1-es, 3-as és az 5-ös rudakat, majd hasonlóan felrajzolva az egyes vektorok irányát a rúderők számíthatók.

## 9.2. Csuklós szerkezetek

Az úgynevezett csuklós szerkezetek a rácsos szerkezetekhez hasonlóan olyan síkbeli szerkezetek, amelyek csuklókkal összekapcsolt rudakból állnak. A különbség abban áll, hogy a csuklós szerkezetek nem csak a csuklókon kapnak terhelést, illetve nem csak a rudak végein vannak csuklók, azaz a csuklós szerkezeteket alkotó rudak közül nem mind tekinthető statikai rúdnak.

A csuklós szerkezetek számítása ugyanazt jelenti, mint rácsos szerkezeteknél: a kényszereknél (támaszoknál, befogásoknál) fellépő reakcióerők és a rúderők meghatározását. Bár a rácsos szerkezeteknél elmondott módszerek itt is alkalmazhatóak, a nemstatikai rudak esetében azonban nem élhetünk azzal a rácsos szerkezetek számítását megkönnyítő körülménnyel, hogy a belső erők csak rúdirányúak lehetnének.

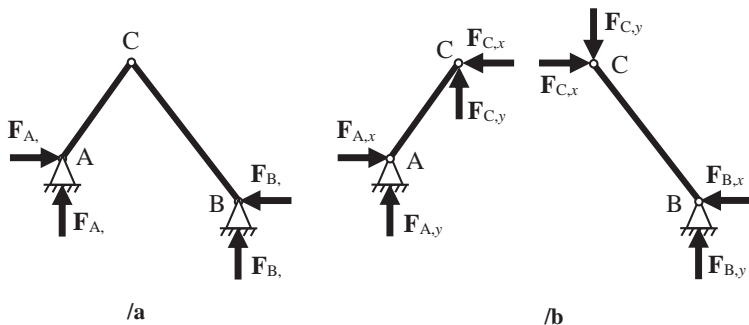
### 9.2.1. Háromcsuklós szerkezet (bakállvány)

A két, egymáshoz és a tartószerkezethez (alaphoz) is csuklókkal rögzített, tetszőleges alakú rúdból álló szerkezetet háromcsuklós szerkezetnek (*three-hinged arch*), más néven bakállványnak nevezzük.

Hány szabadsági foka van a szerkezetnek (azaz pusztán csak a két, egymáshoz csuklóval kapcsolt rúdnak)? Az egész szerkezet a sík két merőleges irányában el tud mozdulni, valamint el is tud fordulni egy tengely körül, amely merőleges a síkra, amelyben fekszenek. Ez 3 szabadsági fok. Azonban a két rúd a csukló körül is el tud fordulni egymáshoz képest. Ez így összesen 4 szabadsági fok. A szerkezetet az alaphoz rögzítő két csukló összesen 4 szabadsági fokot köt le, tehát a szerkezet statikailag határozott. Ez azt jelenti, hogy pusztán a (22)–(24) egyenletek alapján számítható.

(Gondolhatunk azonban úgy is a két rúdra, hogy mindkettőnek van három-három szabadsági foka, azaz összesen hat, a három csukló pedig háromszor kettő, azaz szintén hat szabadsági fokot köt le, a szerkezet tehát valóban statikailag határozott.)

Terheljük meg a bakállványt tetszőleges koncentrált erő(kk)el, és az A és a B csuklóban fellépő reakcióerőket bontsuk fel vízszintes és merőleges komponensekre:  $F_{A,x}$ ,  $F_{A,y}$ ,  $F_{B,x}$  és  $F_{B,y}$  (64/a ábra). Az egyes reakcióerő-komponensek számításához bontsuk a szerkezetet két részre a belső (C) csuklónál, így kapunk két rudat, mindkét végükön egy-egy csuklóval. Mindkét rúdon a C csuklónál helyettesítsük a másik rúd hatását egy vízszintes és egy függőleges irányú erővel úgy, hogy a függőleges és vízszintes irányú erők összege 0 legyen ( $\pm F_{C,x}$  és  $\pm F_{C,y}$ ). Azért így, mert egyrészt a szerkezet egyensúlya miatt minden pontban az ott ható erők eredője nulla; másrészt ha az egyik rúd nem úgy hatna a másikra, mint a másik az egyikre (ahogy a statika IV. alaptétele is állítja), akkor a szerkezet elmozdulna, de tudjuk, hogy egyensúlyban van (64/b ábra). Ez gyakorlatilag a C pontra felírt (22)–(23) egyenleteknek „fejben” történő megoldása.



64. ábra

Ismerve a szerkezet méreteit, felírva a (24) egyenletet az A pontra, a B pontra és a C pontra mindkét rúd esetében, valamint a (22)–(23) egyenleteket mindkét rúdra (nem kifejezve egyikből sem az ismert külső terhelő erő(ke)t), kapunk 8 egyenletet a 6 ismeretlen reakciókomponensre, amely így nemcsak egyértelműen megoldható, de a számítás még ellenőrizhető is (az egyenletrendszer nem túlhatározott).

A megoldás során az úgynevezett szuperpozíció elvét használtuk, amely a lineáris egyenletekkel leírható fizikai rendszerekre vonatkozó általános elv.

Általánosan ez valamely fizikai mennyiség (jelen esetben az erő) független összegződésének elve, azaz a szuperponálódó komponensek (itt: erők) együttes hatása olyan, mintha vektoriálisan összegeznénk a külön-külön ható komponensek hatását. Ez jelen esetben abban nyilvánul meg, hogy az egyik rúdra ható erők másik rúdra gyakorolt hatása felírható egyetlen vektorral,  $\mathbf{F}_C$ -vel. Azaz az egyik rúd számításakor nem szükséges ismerünk a másik rúdon ható egyes erőket, elegendő a szuperpozíciójukkal ( $\mathbf{F}_C$ -vel) számolnunk.

### 9.2.2. Gerber-tartó

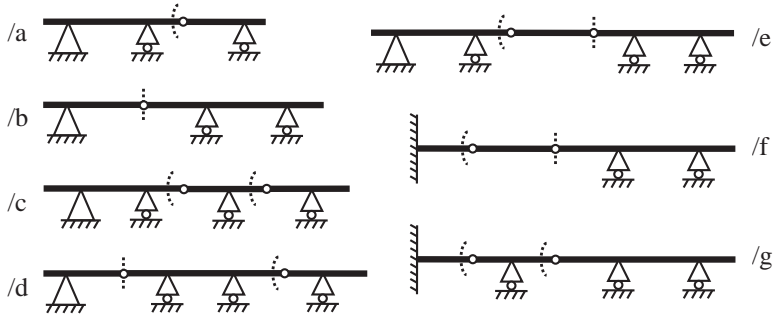
Mindaddig olyan statikailag határozott tartókkal és szerkezetekkel foglalkoztunk, amelyek kéttámaszúak voltak. Azonban nem szükséges, hogy egy kettőnél több támaszú tartó statikailag határozatlan legyen. Az ilyen, egyenestengelyű, statikailag határozott, merev többtámaszú tartókat Gerber-tartónak nevezzük.

Egy többtámaszú tartó akkor lehet statikailag határozott, amennyiben a stabilitást egy csukló és két görgő biztosítja (amelyek összesen már 4 szabadsági fokot kötnek le), ha a tartó meg van szakítva egy belső csuklóval. Azaz itt valójában két, csuklóval összekapcsolt rúdról beszélünk. Ez a belső csukló ugyanis a tartó két felének elfordulását megengedi a körül a pont körül, ahova a csuklót beépítettük, de elmozdulásukat nem teszi lehetővé. Ilyen módon eggyel növeltük a szerkezet szabadsági fokainak számát, amely összesen már 4. Görgőt (vagy például ingaoszlopot) beépítve kettővel növelhetjük a szerkezet szabadsági fokainak számát.

Ha látunk egy többtámaszú tartót, annak statikai határozottságát a legegyszerűbben a következőképpen ellenőrizhetjük. A tartó folytonosságát megszakítják belső csuklók és/vagy görgők, a vizsgálatunk tárgyát az egyes ilyen elemek képezik. Mindegyik ilyen elemre megvizsgáljuk, hogy összesen hány szabadsági fokot lekötő kényszerhez csatlakozik. Azonban a kényszerek szabadsági fokainak csoportosítása megenged egy kis szabadságot.

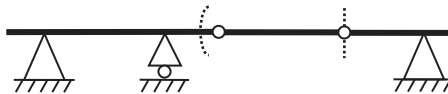
Ha egy elem görgő(k)re van támasztva, az(ok) egy(-egy) szabadsági fokot biztosan abból az elemből köt(nek) le. Azonban a vége(i)n levő belső csukló(k) hozzárendelése nem egyértelmű. Egy ilyen csuklót a két lekötött szabadsági fokával figyelembe vehetjük a szomszédos elemnél is, amelyhez a vizsgált elemet rögzíti, ebben az esetben a vizsgált elem szabadsági fokaiból egyet sem köt le. Figyelembe vehetjük a vizsgált elemnél is, akkor

mind a 2 szabadsági fokot annál az elemnél köti le. Sőt, meg is oszthatjuk a belső csukló 2 lekötött szabadsági fokát: az egyiket figyelembe vehetjük a vizsgált elemnél, a másikat a szomszédosnál. Ha ezen a módon minden kényszer minden lekötött szabadsági fokát egyértelműen hozzárendeljük egy-egy tartóelemhez és mindegyik elemre 3 lekötött szabadsági fok jut, akkor a szerkezet statikailag határozott. A 65. ábra néhány egyszerű Gerber-tartós szerkezetet mutat, a szabadsági fokok felosztását szaggatott vonallal jelölve.



65. ábra

Ez azonban még nem jelenti azt, hogy a szerkezet stabil! Ahogy a 6.4. alfejezetben láttuk, vizsgálni kell, hogy a szerkezet minden terhelésre stabil-e? A 66. ábrán látható szerkezetnél a lekötött szabadsági fokok száma megfelelő, de a jobb oldali belső csuklón fellépő függőleges irányú erővel semmilyen, a jobb oldali fix csuklón fellépő erő nem tud úgy egyensúlyt tartani, hogy az eredő forgatónyomaték a tartó minden pontjában 0 legyen, azaz a szerkezet labilis. Általánosságban elmondható, hogy két egymás melletti belső csukló egyik oldalán befogásnak és a másik oldalán kettős alátámasztásnak, vagy mindkét oldalán kettős alátámasztásnak kell lennie (lásd 65/e és 65/f ábrák).



66. ábra

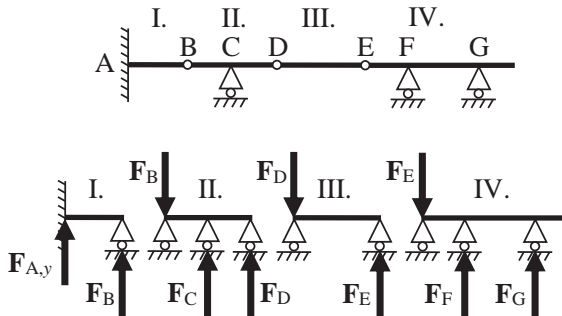


Ha mindezekre leellenőriztük a szerkezetet, elkezdhetjük a Gerber-tartó reakcióerőinek számítását. A nyomóerőábra a kéttámaszú tartókéhoz hasonlóan elkészíthető: a belső csuklók továbbítják a külső húzó- vagy nyomóerőt, az csak fix csuklón vagy befalazáson kompenzálódik.

A függőleges irányú erőknél azonban nem mindegy, melyik elemmel kezdjük, mert bár a szabadsági fokok eloszlása rendben van, ha egy befalazott tartó másik végéhez egy csukló kapcsolódik, annak az elemnek a számításához nem elégségesek a (22)–(24) egyenletek. Hogy jó helyen kezdjük a számítást, be kell azonosítanunk, melyek az úgynevezett főrészek és melyek az úgynevezett befüggesztett részek. A számítást befüggesztett résszel kell kezdeni.

Általános szabályként elmondható, hogy a befogással megtámasztott elem és a (talajhoz) kéttámaszúan megtámasztott elem biztosan főrész, a talajra egyáltalán nem támaszkodó elem pedig biztosan befüggesztett rész.

A számítás elején minden belső csuklóra egy függőleges irányú, két erőből álló egyensúlyi erőrendszert helyezünk ( $\pm F_B$ ,  $\pm F_D$  és  $\pm F_E$ ). Ezután a tartót a belső csuklóknál szétbontjuk elemeire, a belső csuklókat pedig (mindkét elemnél, amelyhez tartozott) egy-egy görgővel helyettesítjük úgy, hogy az egyik csuklóra az egyik, a másik csuklóra a másik erő kerül, mint a görgő reakcióereje (67. ábra,  $F_{A,y}$ ,  $F_C$ ,  $F_F$  és  $F_G$  az eredeti szerkezetben is szereplő kényszerek függőleges reakcióerői).



67. ábra

A befüggesztett elem, amellyel a számolást kezdeni kell, az, amelyik összesen csak két görgőre támaszkodik, semmi másra. Ez jelen példánkban a III. elem. Figyelembe véve a rajta levő külső erőket, felírhatjuk a D és az E pontokra a (24) egyenletet, amelyekből megkapjuk  $F_D$  és  $F_E$  nagyságát. Ezeket

az értékeket helyettesítjük be (csak ellentétes előjellel) a két szomszédos elemen levő azonos nagyságú, de ellentétes irányú erők helyére. Ezáltal a II. és a IV. elem is számítható lesz a B és a C, illetve az F és a G pontokra felírt (24) egyenlet segítségével, hiszen az  $F_D$  és az  $F_E$  erőket már együtt kezelhetjük az ezekre az elemekre ható külső erőkkel. Ezt a négy egyenletet megoldva megkapjuk többek között  $F_B$  értékét is, amely által az utolsó, az I. elem is számítható lesz.

A nyíróerőábrán a belső csuklóknál ugyan lesz egy azonos nagyságú fel- és leugrás, amelyet jelezniünk kell, de ettől eltekintve felrajzolása azonos a kéttámaszú tartóknál elmondottakkal.

A hajlítónyomatéki ábra megrajzolása is egyértelmű a nyíróerők ismeretében. Könnyebbéség, hogy a belső csuklóknál a hajlítónyomaték biztosan nulla.

### 9.2.3. Rúdlánc

Vegyünk  $n$  darab, végeiknél csuklóval összekapcsolt statikai rudat úgy, hogy egy rúdhoz legfeljebb csak egy-egy másik rúd csatlakozik a két végén, és rögzítsük a két szabad végét csuklóval. A (82) összefüggés alapján e szerkezet szabadsági fokainak száma jóval több, mint amennyit a két végén a két külső kényszer le tud kötni, hiszen még három rúdra és négy csuklóra is

$$(105) \quad 3 < 2 \cdot 8 - 3 = 5$$

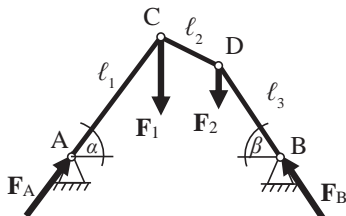
Ezért ez a szerkezet labilis, azaz tetszőleges erőrendszer hatására megváltoztatja az alakját. Mégis, léteznek olyan erőrendszerek, amelyek esetében egyensúlyban van. Egy ilyen úgynevezett rúdlánc tehát olyan, teherhordásra alkalmas labilis szerkezet, amely csuklókkal folytatódlagosan összekapcsolt rudakból áll.

#### 9.2.3.1. Csuklókon terhelt rúdlánc

A külső terhelő erők ismeretében a szerkezet reakcióerői egyszerűen számíthatók, amit egy konkrét példán mutatunk be (68. ábra).

Adott egy, a két végénél azonos magasságban rögzített, három rúdból álló rúdlánc, amelynél ismerjük a három rúd hosszát ( $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ ), az 1-es és a 2-es rúdnak a vízszintessel bezárt  $\alpha$  és  $\beta$  szögét. Hasson a szerkezetre

a C és a D belső csuklónál egy-egy külső terhelő erő,  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$ , amelyek közül az egyik (pl.  $\mathbf{F}_1$ ) ismert. Mekkora(nak) kell lennie  $\mathbf{F}_2$ -nek, hogy a szerkezet egyensúlyban legyen?



68. ábra

Ennél a szerkezetnél ennyi adatból már számolható a 2-es rúd vízszintessel bezárt  $\gamma$  szöge, mivel  $l_{1x} = l_1 \cos\alpha$ ,  $l_{1y} = l_1 \sin\alpha$ ,  $l_{3x} = l_3 \cos\beta$ ,  $l_{3y} = l_3 \sin\beta$ , így a függőleges méretekre felírható a

$$(106) \quad l_{1y} = l_{2y} + l_{3y}$$

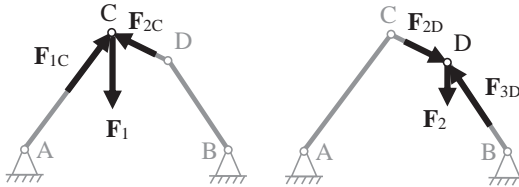
egyenlőség, amelyből  $l_{2y}$  egy kivonással megkapható, és felhasználásával a

$$(107) \quad \sin(\gamma) = \frac{l_{2y}}{l_2}$$

összefüggésből egy inverz szögfüggvénnyel  $\gamma$  kifejezhető.

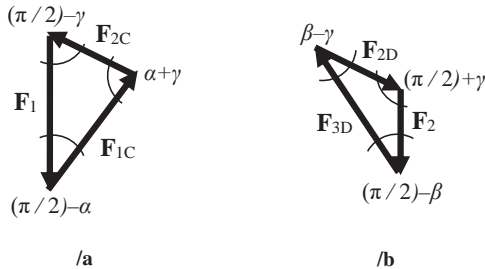
Tudjuk, hogy ha egy rendszer egyensúlyban van, akkor minden rész-rendszere is egyensúlyban van. Ez itt azt jelenti, hogy minden rúd és minden csukló önmagában is egyensúlyban van, azaz a rájuk ható erők és forgatónyomatékok vektori összege nullvektor. Tudjuk továbbá, hogy mivel a rudakra erők csak a végeiknél, a csuklónál hatnak, ezért a rudak statikai rudak, azaz bennük csak rúdírányú erők ébredhetnek. Éppen ezért az  $\mathbf{F}_A$  és  $\mathbf{F}_B$  erők biztosan párhuzamosak az AC és a BD rudakkal.

Jelöljük azt a reakcióerőt  $\mathbf{F}_{1A}$ -val, amellyel az 1-es rúd hat az A csuklóra;  $\mathbf{F}_{1C}$ -vel, amellyel az 1-es rúd hat a C csuklóra; és  $\mathbf{F}_{2C}$ -vel, amellyel a 2-es rúd hat a C csuklóra, és hasonlóan definiáljuk az  $\mathbf{F}_{2D}$ ,  $\mathbf{F}_{3B}$ ,  $\mathbf{F}_{3D}$  erőket is. Az 1-es és a 3-as rudak statikairúd-voltából következik, hogy  $F_A = F_{1A}$ ,  $F_{1A} = F_{1C}$ ,  $F_B = F_{3B}$  és  $F_{3B} = F_{3D}$  (69. ábra).



69. ábra

A C csuklónál ismerünk a három erőből egyet:  $F_1$ -et és az egymással bezárt szögeiket, így fel tudjuk rajzolni a vektorháromszöget, amiből szinusztétellel az egyes vektorok abszolút értékét ki is tudjuk számolni (70/a ábra). Hasonlóan a D csuklóra  $F_{2D}$  már ismert, mivel  $F_{2D} = F_{2C}$  a 2-es rúd egyensúlya miatt, és mivel minden szög ismert,  $F_2$  és  $F_{3D}$ , és így  $F_B = F_{3D}$  is meghatározható a szinusztétel segítségével (70/b ábra).



70. ábra

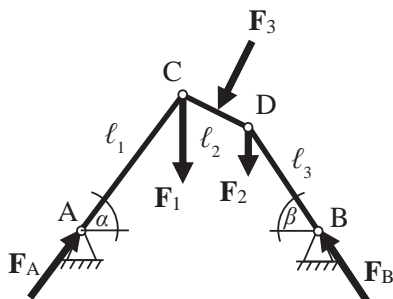
Ezzel a módszerrel egyesével végighaladva a csuklókon akárhány rúdból álló rúdláncot ki lehet számolni. Igaz az is, hogy ha az  $F_1$  erőt  $k$ -szorosára változtatjuk, akkor az összes többi erő is  $k$ -szorosára változik, azaz  $F_2$ -nek is  $k$ -szorosára kell változnia, hogy a szerkezet egyensúlyban legyen.

A feladat ugyanakkor visszafelé is megoldható: a terhelő erők ismeretében a rúdlánc alakja, azaz az egyes rudak vízszintessel bezárt szögei számolhatók.

A most megoldott, 68. ábrán látható, alulról homorú szerkezetet feszítőtöműnek, az ezzel ellentétes görbületűt pedig függesztöműnek nevezzük.

### 9.2.3.2. Csuklókon és rudakon terhelt rúdlánc

Az előzőekben elmondottak azonban csak akkor érvényesek, ha a rudak statikai rudak. Ha egy rúdra a két végén található csuklón kívül máshol is hat terhelő erő, akkor az a rúd nem statikai rúd. Ekkor fel kell írni a rúd egyensúlyát is. Például ha a 68. ábrán szereplő feladatot úgy módosítjuk, hogy a 2-es rúdra is hat a felezőpontjában a rúdra merőlegesen egy  $F_3$  erő (71. ábra), akkor a D pontra felírva a külső terhelő erők forgatónyomatékainak összegét:



71. ábra

$$(108) \quad M_D = 0 = \frac{\ell_2}{2} F_3 + \ell_{2x} F_1 - \ell_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma\right) F_A$$

amelyből  $F_A$  értéke azonnal adódik. Kiszámolva  $F_{Ax}$ -et, felírható a vízszintes irányú erők zérus összege a 2-es rúdra:

$$(109) \quad F_{Ax} - F_{3x} - F_{Bx} = 0$$

amelyből megkapjuk  $F_{Bx}$ -et, és így  $F_B$  is számolható szögfüggvénnyel. A külső terhelő erők függőleges irányú komponenseinek összegét felírva a 2-es rúdra:

$$(110) \quad F_{Ay} - F_1 - F_{3y} - F_2 + F_{By} = 0$$

amelyből  $F_2$  már számolható.

Határesetben, amikor  $F_3 = 0$ , ezzel a módszerrel is megkapjuk a 9.5.1. alfejezet eredményét.

### 9.3. Kötél

Kötél alatt egy olyan idealizált kényszert értünk, amely tökéletesen hajlékony, végtelenül vékony, de van tömege és a terhelés hatására nem nyúlik meg. A kötélt csak húzó igénybevételre terhelhető. A rúdlánccal ellentétben csak a csomópontoknál való koncentrált erővel történő terhelésnek van értelme, de ez esetben a megoldás megegyezik egy olyan, a terhelő koncentrált erők számánál eggyel több rúdból álló rúdláncéval, amelynek minden rúdja húzott.

Mivel azonban a kötélt megoszló terhelés esetében „végtelen rövid” rudakból álló rúdláncként viselkedik, felmerül a kérdés, hogy milyen alakot vesz fel például saját súlya alatt, ha két végpontján felfüggesztjük, vagy különböző megoszló terhelések hatására?

#### 9.3.1. Saját súlya alatt meghajló kötélt

Mivel a kötélnak van tömege, ezért van súlya is. Legyen a kötélt tengelye párhuzamos az  $x$  tengellyel, az  $y$  pedig legyen a függőleges, gravitációs térrel párhuzamos tengely. Ha a kötélt tömege  $m$ , teljes súlya  $G = mg$ . Ez alapján definiálhatjuk a kötélt folyómétersúlyát is, amelyet a

$$(111) \quad \gamma = \frac{dG}{d\ell}$$

képlettel számolhatunk, ahol  $d\ell$  egy infinitezimális hosszúságú szakasza a kötélnak. Ha a kötélt tömege egyenletesen oszlik meg annak hossza mentén, a (111) definíció a

$$(112) \quad \gamma = \frac{G}{\ell}$$

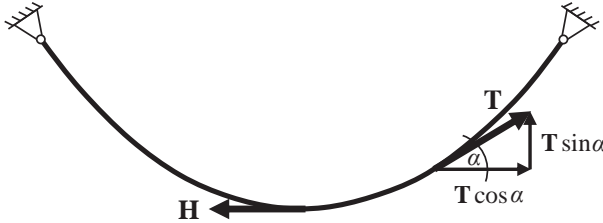
alakra egyszerűsödik, ahol  $\ell$  a kötélt teljes hossza:  $\ell = \int d\ell$ . Ez azonban nem egyezik meg a kötéltre függőlegesen, azaz az  $y$  tengely irányában ható megoszló erőrendszerrel, ugyanis a kötélnak általában nem elhanyagolható mértékű a belógása, azaz a kötélt hossza jelentősen meghaladja az  $x$  tengelyre vett merőleges vetületének hosszát. A  $ds$  hosszúságú ívelemre jutó kötélsúly ezért nem  $\gamma dx$ , hanem

$$(113) \quad dG = \gamma ds$$

Innen egy infinitezimális vízszintes  $dx$  szakaszra jutó terhelés:

$$(114) \quad q(x) = \frac{dG}{dx} = \gamma \frac{ds}{dx}$$

Vegyünk egy egyensúlyban levő, két végén felfüggesztett kötelet. Az egyensúly miatt bármely szakaszára igaz, hogy az összes rá ható erő vektori összege nullvektor, és ez igaz külön-külön a vízszintes és a függőleges irányú komponensekre is. Vizsgáljuk most egy olyan  $\ell_1$  hosszúságú darabját a kötélnak, amelynek egyik végpontja a kötel legmélyebben belógó pontja, másik vége pedig szabadon választott. Ekkor a kötélszakaszra hat a gravitációs erő, azaz a súlya mint megoszló erőrendszer, és ezzel tart egyensúlyt a kötél darab két végpontján fellépő két erő, amelyeket jelöljünk  $\mathbf{H}$ -val és  $\mathbf{T}$ -vel (72. ábra).



72. ábra

A  $\mathbf{T}$  erőt merőleges komponensekre bontva felírhatjuk a függőleges komponens egyensúlyát a súlyerővel, a vízszintes komponens egyensúlyát pedig a  $\mathbf{H}$  erővel:

$$(115) \quad T \sin(\alpha) = \ell_1 \gamma$$

$$(116) \quad T \cos(\alpha) = H$$

ahol  $\alpha$  a  $\mathbf{T}$  erőnek a vízszintessel bezárt szöge. A (115) és a (116) egyenleteket egymással elosztva megkapjuk a kötel adott pontjánál annak meredekségét. Itt kihasználjuk, hogy  $\ell_1 = \int ds$  és hogy  $\gamma = \text{const.}$ , azaz hogy a (114) összefüggést a  $\gamma ds = q(x) dx$  alakra rendezve és végigintegrálva a teljes kötélen a bal oldalon pont  $\gamma \ell_1$  jelenik meg:

$$(117) \quad \text{tg}(\alpha) = y'(x) = \frac{\gamma}{H} \ell_1 = \frac{\int q(x) dx}{H} = \frac{G}{H}$$

Mivel az  $\ell_1$  hosszúságú kötélszakasz nem vízszintes, ezért hosszabb, mint az  $x$  tengelyre vett vetülete. Az  $\ell_1$  szakasz hosszát tehát ki tudjuk fejezni az ívhossz kiszámítására vonatkozó integrálképlettel:

$$(118) \quad y'(x) = \frac{\gamma}{H} \ell_1 = \frac{\gamma}{H} \int_0^{\ell_1} ds$$

A  $ds$  ívhosszelem kifejezhető a Pitagorasz-tétel segítségével a vízszintes és a függőleges ívelemekkel:

$$(119) \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

amelyet  $dx$ -szel leosztva kapjuk:

$$(120) \quad \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

A kifejezést  $ds$ -re rendezve és behelyettesítve a (118) összefüggésbe:

$$(121) \quad y'(x) = \frac{\gamma}{H} \int \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

ahol az  $y(x)$  függvény a kötélek alakját leíró függvény. Mindkét oldalt még egyszer deriválva  $x$  szerint:

$$(122) \quad y''(x) = \frac{\gamma}{H} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

Ez a kötélek görbájének differenciálegyenlete. Megoldva  $y(x)$ -re megkapjuk, milyen alakot vesz fel egy súlyos kötélek homogén gravitációs térben. Ehhez végezzük el a  $z(x) = y'(x)$  helyettesítést!

$$(123) \quad z'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{\gamma}{H} \sqrt{1 + z(x)^2}$$

Ez egy egyszerű szétválasztható differenciálegyenlet. Rendezve és mindkét oldalt integrálva:

$$(124) \quad \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z(x)^2}} = \int \frac{\gamma}{H} dx$$



Mivel a jobb oldalon konstansok vannak, az integrál egyszerűen a konstans 1 függvény integrálására egyszerűsödik, a bal oldal primitív függvénye pedig az area szinusz hiperbolikus függvény:

$$(125) \quad \operatorname{arsh}(z(x)) = \frac{\gamma}{H} x + \operatorname{const}_1$$

Ebből ki akarjuk fejezni  $z(x)$ -et, hogy utána visszahelyettesíthessük az  $y'(x)$  függvényt. Ehhez vegyük mindkét oldalnak a szinusz hiperbolikusát:

$$(126) \quad y'(x) = z(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{H} x + \operatorname{const}_1\right)$$

Mindkét oldalt tudjuk integrálni  $x$  szerint, hiszen a szinusz hiperbolikus függvény primitív függvénye a koszinusz hiperbolikus:

$$(127) \quad \begin{aligned} y(x) &= \int z(x) dx = \int \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{H} x + \operatorname{const}_1\right) dx = \\ &= \frac{H}{\gamma} \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma}{H} x + \operatorname{const}_1\right) + \operatorname{const}_2 \end{aligned}$$

Vagyis azt kaptuk, hogy egy súlyos kötél alakja homogén gravitációs térben koszinusz hiperbolikus lesz. Ezt a függvényalakot láthatjuk például a belógó elektromos távvezetéseken is, de egy nyaklánc is ilyen alakot vesz fel. Ezért nevezik a függvény görbét láncgörbének.

A két végén felfüggesztett kötél súlyát a két felfüggesztési pont hordozza. Ez azt is jelenti, hogy ha olyan, két szélén alátámasztott boltívet akarunk építeni, amely csak önmaga súlyát hordozza, mással nincs megterhelve, azt célszerű szintén koszinusz hiperbolikus alakúra tervezni, mert így vízszintes irányú erők nem lépnek fel a szerkezetben: gyakorlatilag csak nyomásra vannak terhelve, hajlításra nem. Szép példa erre a Keleti pályaudvar tetőszerkezete (73. ábra).



73. ábra

*Forrás:* Wikipédia

Erről a függvényalakról intuitíve már az ókorban felfedezték, hogy boltívek esetében stabilabb, mint a körív.

Kis belógású kötelek esetében alkalmazhatunk egy közelítést. Ekkor ugyanis, mivel  $dy \ll dx$ , a kötélt majdnem pontosan az  $x$  tengelyre illeszkedve fut, ezért feltehetjük, hogy  $ds \approx dx$ , és így a (118) egyenlet azonnal integrálható:

$$(128) \quad y'(x) = \frac{\gamma}{H} \int dx = \frac{\gamma}{H} x$$

$$(129) \quad y(x) = \frac{\gamma x^2}{2H} + const$$

azaz a kötélt ilyenkor egy másodfokú parabolával közelíthetjük. Ugyanakkor a függőhidak kábeleit, amelyekre a híd szerkezete szabályos közökben hozzá van erősítve, bár nagy belógásúak, parabola alakúak.

### 9.3.2. Megoszló erőrendszerrel terhelt kötél

A függőhidak esetében a kábelek súlya a hordozott pályaszerkezethez képest elhanyagolható. Tegyük fel tehát, hogy a külső terhelés mellett a kötél önsúlya elhanyagolható. Emellett feltesszük, hogy a pályaszerkezet egy egyenletesen megoszló  $q(x)$  erőrendszerként terheli a kábeleket. Emiatt a (118) differenciálegyenlet a következő alakba írható:

$$(130) \quad y'(x) = \frac{q(x)}{H} x$$

ahol  $H$  továbbra is a kábel legmélyebb pontján ható vízszintes irányú feszítőerő. Az egyenletet integrálva kapjuk:

$$(131) \quad y(x) = \frac{q(x)x^2}{2H} + const$$

amely eredmény alakilag megegyezik a (129) egyenlettel, azaz matematikailag mindegy, hogy a kötél belógása kicsi vagy a rá ható terhelő megoszló erőrendszer nagy a kötél önsúlyához képest.

Hogy igazából mennyire kicsi az eltérés a láncgörbe és a parabola között, azt a 74. ábra szemlélteti. A folytonos vonal koszinusz hiperbolicus, a pontozott vonal parabola. A valóságban a függőhidak kábeleinek alakja valahol a két görbe között van.



74. ábra

Forrás: Wikipédia

## 10. Súrlódás

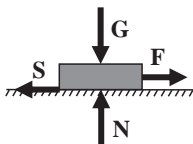
A súrlódási erő (*friction force*) két érintkező felület között fellépő reakcióerő, amely az elmozdulás ellenében hat. Mikroszkopikus oka a két test molekulái között fellépő elektromágneses erő, makroszkopikus oka lehet a két érintkező felület egyenetlensége. A súrlódással szemben végzett munka hővé alakul. Szilárd testek között fellépő súrlódást száraz súrlódásnak (*dry friction*) vagy Coulomb-súrlódásnak, míg a szilárd test és folyadék vagy gáz közötti súrlódást közegellenállásnak nevezzük. Itt a szilárd testek külső felülete, illetve a közeg és a benne mozgó szilárd test felülete között lép fel a súrlódás. Ez utóbbi a műszaki mechanikában főként különböző kenőanyagokkal kapcsolatos számításokban kerül elő, ezért itt most csak a száraz súrlódással fogunk foglalkozni. Megemlítendő még a rugalmas testek alakváltozásakor fellépő, úgynevezett belső súrlódás, amelynél nem a teljes deformációra befektetett munka fordítódik az alakváltoztatásra, hanem egy része szintén hővé alakul.

### 10.1. Tapadási súrlódás

A tapasztalat szerint, ha vízszintes felületen egy  $F$  erővel nyomva éppen sikerült megmozdítani egy testet, utána egy bizonyos mértékig csökkenthetjük a nyomóerőt, hogy a test még ne álljon meg. Ez azt mutatja, hogy a test megmozdulásával megváltozik a kölcsönhatás nagysága a test és a felület között, amelyen addig nyugodott. A mozgásba hozatal előtt az úgynevezett tapadási súrlódás (*static friction*) hatott köztük, míg a mozgás megindulása után már az úgynevezett csúszási súrlódás (*kinetic friction*) hat. Mivel a mozgás a dinamika tárgykörébe tartozik, itt csak a megmozdulás pillanatáig vizsgáljuk a fellépő erők változását, illetve csak a megmozdításhoz szükségesnél kisebb erőkkel fogunk foglalkozni.

### 10.1.1. Párhuzamos húzás vízszintes felületen

Egy vízszintes alapra helyezett testre két erő hat: a test önsúlya (amelyet, bár valójában megoszló erőrendszer, a test súlypontjában a  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$  súlyerővel szoktuk helyettesíteni) és az ezzel egyensúlyt tartó, az alapra merőleges, azonos nagyságú, ellentétes irányú reakcióerő, az úgynevezett nyomóerő ( $\mathbf{N}$ ), amely szintén egy megoszló erőrendszer helyettesítő koncentrált erője (75. ábra). Ez alapján a testnek bármilyen kicsi, az alap síkjával párhuzamos komponenszt tartalmazó erő hatására vízszintes irányban el kellene mozdulna. Ez tapasztalataink szerint mégis így, és ennek oka a súrlódási erő. A vízszintes erőkomponensnek el kell érnie egy bizonyos nagyságot, hogy a test mozgásba jöjjön, ennél kisebb értékek esetében a test nyugalomban marad. Ez azt jelenti, hogy ha a vízszintesen ható erőkomponens kisebb ennél a határértéknél, akkor fellép egy vele ellentétes irányú, de pontosan azonos nagyságú, az érintkezési felületen megoszló erőrendszer is, amely akadályozza a mozgást. Ennek a megoszló erőrendszernek az eredőjét nevezzük tapadási súrlódási erőnek ( $\mathbf{S}$ ).



75. ábra

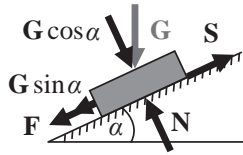
Ha növeljük  $\mathbf{F}$  nagyságát, egy határig  $\mathbf{S}$  is nőni fog, egy bizonyos nagyságú  $\mathbf{F}$  erőnél (jelöljük ennek nagyságát  $F_0$ -lal) azonban már nem képes azt kompenzálni, és a test megcsúszik. Az  $\mathbf{S}$  erő a megcsúzás pillanatában éri el maximumát:

$$(132) \quad S \leq S_{\max} = F_0$$

### 10.1.2. Párhuzamos húzás döntött felületen

Helyezzük a testet egy  $\alpha$  hajlásszögű lejtőre! (76. ábra) Mivel az  $\mathbf{N}$  nyomóerő mindig az érintkezési felületre merőleges, ezért nagyságának a  $\mathbf{G}$  erő felületre merőleges komponensével kell megegyeznie:

$$(133) \quad N = G \cos(\alpha) = G_{\perp}$$



76. ábra

A  $G$  erő felülettel párhuzamos komponense,

$$(134) \quad G_{\parallel} = G \sin(\alpha)$$

a testet gyorsítja a lejtőn lefelé, azaz az  $F$  húzóerőhöz adódik hozzá. Jelöljük  $F_{\alpha}$ -val azt a húzóerőt, amelynél a test még éppen egyensúlyban van, azaz bármilyen  $F > F_{\alpha}$  húzóerő esetében a test megcsúszna lefelé. Ekkor az  $S$  súrlódási erő nagyságának, ami jelen esetben  $S_{\max}$ , az  $F_{\alpha} + G \sin \alpha$  értéket kell felvennie. Ebből kifejezhető  $F_{\alpha}$  értéke:

$$(135) \quad F_{\alpha} = S_{\max} - G \sin(\alpha)$$

Természetesen ha az  $F$  erővel felfelé nyomjuk a testet a lejtőn, akkor  $S$  a lejtőn lefelé mutat, és  $G_{\parallel}$  abszolút értéke kivonódik az  $F$  erő abszolút értékéből. Ekkor az  $F_{\alpha} = S_{\max} + G \sin \alpha$  alakot kapjuk.

Növeljük a lejtő hajlásszögét! Egy bizonyos  $\alpha$  értéknél a test már úgy is megcsúszik, hogy nem kell külön az  $F_{\alpha}$  erőt is hattaníni rá, hogy mozgásba hozzuk, mivel a test súlyerejének lejtőirányú komponense nagyobb vált a maximálisan lehetséges tapadási súrlódási erőnél. Azt a hajlásszöveget, amelynél a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense a súrlódási erő maximális értékével egyenlővé válik, súrlódási szögnek (*angle of friction*) nevezzük és  $\rho$ -val jelöljük. Ennél a szögértéknél a súlyerő éppen egyensúlyt tart a súrlódási erővel. Az  $\alpha$  szög ennél kisebb értékeire egy nemnulla  $F$  erő még szükséges a test mozgásba hozásához, ennél nagyobb értékeknél pedig a test önsúlyánál fogva fog gyorsulni a lejtőn lefelé. A megcsúszás határesetében tehát  $F_{\alpha} = 0$ , azaz a (135) összefüggés alapján

$$(136) \quad S_{\max} = G \sin(\rho)$$

A 76. ábra alapján

$$(137) \quad N = G \cos(\rho) = G \frac{\sin(\rho)}{\operatorname{tg}(\rho)}$$

amelyből  $G \sin(\varrho)$ -t kifejezve és a (136) összefüggésbe behelyettesítve és bevezetve a  $\mu_0 = \operatorname{tg}(\varrho)$  jelölést kapjuk:

$$(138) \quad S_{\max} = N \operatorname{tg}(\rho)$$

$$(139) \quad S_{\max} = N \mu_0$$

ahol  $\mu_0$ -t tapadási súrlódási együtthatónak nevezzük.

Egy gondolat erejéig itt térjünk vissza a csúszási súrlódásra. Ha egy változtatható hajlásszögű lejtőn a test  $\alpha > \varrho$  szögnél megcsúszott, utána a lejtő hajlásszögét egy  $\alpha < \varrho$  értékre kell csökkentenünk, ha azt akarjuk, hogy a test megálljon. A test megmozdulásával ugyanis megváltozik a test és a felület közti súrlódási együttható, és bár az erőkről eddig elmondott összefüggések érvényesek maradnak, a  $\mu_0$  tapadási súrlódási együttható szerepét a nála kisebb  $\mu$  csúszási súrlódási együttható veszi át. A súrlódási erő a mozgás során állandó, értéke  $S = N\mu$ .

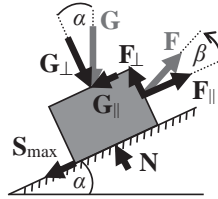
### 10.1.3. Ferde húzás döntött felületen

#### 10.1.3.1. Nyugvó test húzása felfelé

Tegyük fel, hogy egy  $\alpha$  hajlásszögű lejtőn egy  $G$  súlyú test nyugalomban van. Mekkora lehet legfeljebb egy olyan, a testet a lejtőn fölfelé húzó  $F$  erő nagysága, amely nem a lejtő irányában hat, hanem azzal egy  $\beta$  szöget zár be, hogy a test még éppen ne csússzon meg fölfelé (77. ábra)? Ebben az esetben nem csak  $G$ -t, hanem  $F$ -et is fel kell bontanunk két, egymásra merőleges komponensre, amelyek egyike a lejtővel párhuzamos, a másik merőleges rá:

$$(140) \quad F_{\max\parallel} = F_{\max} \cos(\beta)$$

$$(141) \quad F_{\max\perp} = F_{\max} \sin(\beta)$$



77. ábra

Ekkor az  $\mathbf{N}$  erő az  $\mathbf{F}_{\max\perp}$  és a  $\mathbf{G}_{\perp}$  vektorok összegével tart egyensúlyt:

$$(142) \quad N = G_{\perp} \mp F_{\max\perp} = G \cos(\alpha) \mp F_{\max} \sin(\beta)$$

A felső előjel a pozitív  $\beta$  szögekre, azaz a lejtő síkjától „elfelé” mutató irányú  $\mathbf{F}$  erőre, az alsó előjel a negatív  $\beta$  szögekre, azaz a lejtő síkjánál „lejjebb” mutató  $\mathbf{F}$  erőre vonatkozik.

Hasonlóan, az  $\mathbf{F}_{\max\parallel}$  is hozzáadódik  $\mathbf{G}_{\parallel}$ -hoz, és ez az eredő erő tart egyensúlyt  $\mathbf{S}_{\max}$ -szal:

$$(143) \quad S_{\max} = F_{\max\parallel} - G_{\parallel} = F_{\max} \cos(\beta) - G \sin(\alpha)$$

A (138) egyenlet bal oldalába a (143) összefüggést, jobb oldalába a (142) összefüggést behelyettesítve és a tangens szinusz per koszinusz alakra átírva:

$$(144) \quad F_{\max} \cos(\beta) - G \sin(\alpha) = G \cos(\alpha) \frac{\sin(\rho)}{\cos(\rho)} \mp F_{\max} \sin(\beta) \frac{\sin(\rho)}{\cos(\rho)}$$

Mindkét oldalt végigszorozva  $\cos\rho$ -val és az így kapott egyenletet  $F_{\max}$ -ra és  $G$ -re rendezve:

$$(145) \quad F_{\max} (\cos(\beta) \cos(\rho) \pm \sin(\beta) \sin(\rho)) = G (\cos(\alpha) \sin(\rho) + \sin(\alpha) \cos(\rho))$$

majd a szögek összegére és különbségére vonatkozó addíciós tételeket felhasználva  $F_{\max}$ -ot kifejezve:

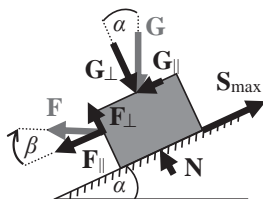
$$(146) \quad F_{\max} = G \frac{\sin(\rho + \alpha)}{\cos(\rho \mp \beta)}$$



A nevezőben a felső előjel a lejtő síkjánál „feljebb”, azaz a lejtőtől elfelé, az alsó előjel a lejtő síkjánál „lejjebb”, azaz a lejtő felé mutató  $\mathbf{F}$  vektornak felel meg.

### 10.1.3.2. Nyugvó test húzása lefelé

Tegyük fel, hogy egy  $\alpha$  hajlásszögű lejtőn egy  $\mathbf{G}$  súlyú test nyugalomban van. Mekkora lehet legfeljebb egy olyan, a testet a lejtőn lefelé húzó  $\mathbf{F}$  erő nagysága, amely nem a lejtő irányában hat, hanem azzal egy  $\beta$  szöveget zár be, hogy a test még éppen ne csússzon meg lefelé (78. ábra)?



78. ábra

A levezetés teljesen hasonló az előzőekben ismertetethez, mindössze a (143) egyenletnek megfelelő egyenletben nem kivonás, hanem összeadás fog szerepelni a jobb oldalon. Az így módosított (143) összefüggéssel és a (142) összefüggéssel végigszámolva a következőt kapjuk az  $\mathbf{F}$  erő maximális nagyságára:

$$(147) \quad F_{\max} = G \frac{\sin(\rho - \alpha)}{\cos(\rho \mp \beta)}$$

A (146)–(147) egyenletek tehát felírhatók egyben is, ahol a számlálóban a felső műveleti jel a lejtőn fölfelé, az alsó a lejtőn lefelé mozgó  $\mathbf{F}$  esetének felel meg. A nevezőben a felső előjel a lejtő síkjánál „feljebb”, azaz a lejtőtől elfelé, az alsó előjel a lejtő síkjánál „lejjebb”, azaz a lejtő felé mutató  $\mathbf{F}$  vektornak felel meg:

$$(148) \quad F_{\max} = G \frac{\sin(\rho \pm \alpha)}{\cos(\rho \mp \beta)}$$

### 10.1.3.3. Csúszó test megtartása

Tegyük fel, hogy az  $\alpha$  hajlásszögű lejtőre helyezett  $\mathbf{G}$  súlyú test nincs nyugalomban, hanem lefelé mozog, azaz a lejtő és a test közti  $\mu$  csúszási súrlódási együttható az  $\alpha$  szöghöz képest nem elég nagy, hogy a test nyugalomban maradjon. Kérdés, hogy mekkora, a lejtő síkjával  $\beta$  szöget bezáró, fölfelé mutató  $\mathbf{F}$  erő szükséges, hogy a test megálljon?

A levezetés teljesen hasonló az előzőekhez, annyi különbséggel, hogy ekkor  $\mathbf{F}_{\parallel}$  és  $\mathbf{S}_{\max}$  is a lejtőn felfelé mutat, azaz a (143) összefüggésnek megfelelő egyenlet az

$$(149) \quad \begin{aligned} S_{\max} &= F_{\min\parallel} = G_{\parallel} \\ S_{\max} + F_{\min} \cos(\beta) &= G \sin(\alpha) \end{aligned}$$

alakot veszi fel. Ezzel, illetve a (142) összefüggéssel végigszámolva, kapjuk:

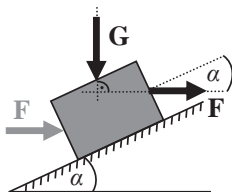
$$(150) \quad F_{\min} = G \frac{\sin(\alpha - \rho)}{\cos(\beta \pm \rho)}$$

ahol a nevezőben a felső előjel a lejtő síkjánál „feljebb”, azaz a lejtőtől elfelé, az alsó előjel a lejtő síkjánál „lejjebb”, azaz a lejtő felé mutató  $\mathbf{F}$  vektornak felel meg.

### 10.1.3.4. Vízszintes tolás/húzás felfelé

A döntött felületen való ferde húzásnak egy speciális esete, amikor  $\beta = \alpha$ , azaz a lejtőn felfelé nyomó  $\mathbf{F}$  erő merőleges a gravitációs erőre (79. ábra). Ez annak felel meg, hogy az  $\mathbf{F}$  erő felfelé húzza a testet. Ez a (148) egyenlet számlálójában a felső előjel esete, hiszen mindegy, hogy lentől felfelé toljuk vagy fentről húzzuk a testet. De ekkor az  $\mathbf{F}$  erő a lejtő síkjához képest „lefelé”, a lejtő síkja felé mutat. Ez a (148) egyenlet számlálójában az alsó előjel esete. Mindezt összevetve a (148) egyenlet számlálójában és nevezőjében is  $\varrho + \alpha$  jelenik meg a szögfüggvények argumentumában, ami így a tangens szögfüggvénynek felel meg:

$$(151) \quad F_{\max} = G \operatorname{tg}(\rho + \alpha)$$



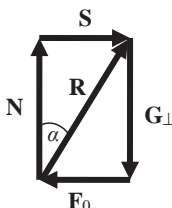
79. ábra

Ha  $\mathbf{F}$  ellenkező irányba mutat, azaz lefelé húzza a testet, akkor a számlálóban az alsó, a nevezőben a felső előjelet kell figyelembe venni:

$$(152) \quad F_{\max} = G \frac{\sin(\rho - \alpha)}{\cos(\rho - \alpha)} = G \operatorname{tg}(\rho - \alpha)$$

## 10.2. Súrlódási kúp

A 80. ábrán látható, a nyomóerő és a súrlódási erő vektori összegeként képzett  $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{S}$  erőt támasztóerőnek nevezzük, maximális értéke  $R_{\max} = N + S_{\max}$ , amelyet az  $\alpha = \varrho$  esetben, a megcsúszási határhelyzetnél vesz fel. Ezt az erőt fejti ki a támasz a testre.



80. ábra

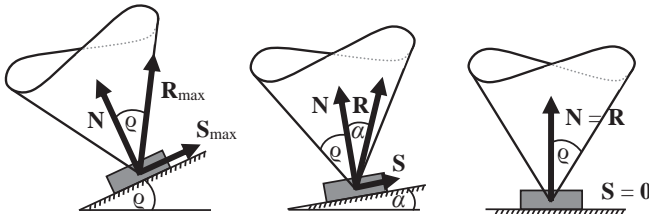
Ha azonos alakú (pontosabban azonos érintkezési felületű), de nehezebb (nagyobb tömegű) testet helyezünk az  $\alpha$  hajlásszögű lejtőre, azzal megnöveljük a  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$  erő nagyságát, és ezzel az  $\mathbf{N} = \mathbf{G} \cos \alpha$ , de az  $\mathbf{S}_{\max} = \mathbf{G} \sin \alpha$  erő nagyságát is; így bár az  $\mathbf{R}$  erő nagysága is megnőtt, a lejtő síkjával bezárt szöge azonban nem változott. Ez azt jelenti, hogy a test tömegének növelésével a maximális súrlódási erő is növekszik, miközben a megcsúszás határszöge állandó marad.

Ha érdekesebb felületű lejtőre helyezzük a testet (vagy ugyanarra a lejtőre egy azonos támadási felületű és tömegű, de érdekesebb felületű testet helyezzünk),

akkor csak az  $S_{\max}$  érték növekedését tapasztaljuk, hiszen  $G$  értéke és azon keresztül az  $N$  értéke nem változott. Ez azt jelenti, hogy az  $R$  és  $\varrho$  értéke is növekszik: a megcsúszás érdesebb felületű lejtőn csak meredekebb hajlászögnél következik be.

A tapadási súrlódási erő maximális nagyságát tehát két körülmény befolyásolja: a test tömege, valamint a lejtő és a test anyagi minősége, de előbbi a megcsúszás határszögére nincs hatással.

Rajzoljuk fel az  $N$ ,  $S_{\max}$  és  $R_{\max}$  vektorokat a lejtőre (81. ábra). Mivel a lejtő állása a testhez képest bármilyen lehet, hiszen a nyomóerő nagysága nem függ a test és a lejtő érintkezési felütlének alakjától, csak nagyságától, ezért az  $R$  támasztóerő valójában az  $N$  nyomóerő körüli  $\varrho$  félnyílásszögű kúp felületén vagy azon belül helyezkedhet el, hogy a test nyugalomban legyen. Ha  $\alpha = \varrho$ , akkor  $R = R_{\max}$  pont a kúp felületére illeszkedik; ha  $\alpha < \varrho$ , akkor  $R < R_{\max}$  a kúpon belül található. Ezt a  $2\varrho$  nyílásszögű kúpot súrlódási kúpnak nevezzük.

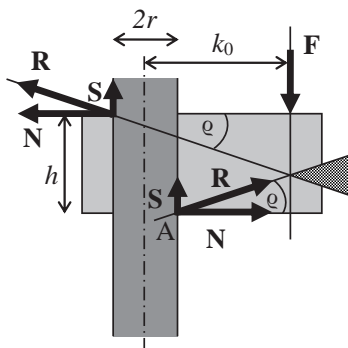


81. ábra

### 10.3. Önzárás

Lehetséges olyan szerkezetek készítése is, amelyeknél a nyugalmi helyzetet a súrlódás teszi lehetővé. Ehhez az kell, hogy a testet mozgató erővel arányosan nőjön az  $N$  nyomóerő, így a súrlódási erő mindig nagyobb legyen a mozgató erőnél.

Nézzünk egy rúd mint tengely mentén elmozdulni képes csúszkát. Mivel egy minimális mozgása kell, hogy legyen a csúszkának, hogy el tudjon mozdulni a rúd mentén, amikor egy  $F$  erővel megterheljük, két, a 82. ábrán jelölt helyen fog érintkezni a rúddal. Mivel a súrlódási erő mindig gátolja a mozgást, a fellépő  $S$  erők az  $F$  erővel ellentétes irányba fognak mutatni, a nyomóerők pedig az érintkezési felületre merőlegesek lesznek.



82. ábra

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a maximális súrlódási erő lép fel, azaz  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\max}$  és az  $\mathbf{N}$  és az  $\mathbf{N} + \mathbf{S} = \mathbf{R}$  erők által bezárt szög éppen  $\varrho$ . A függőleges irányú erők összegének nullának kell lennie, ezért:

$$(153) \quad F = 2S_{\max}$$

Továbbá tudjuk, hogy egyensúlyban vagyunk, ezért az összes erő vektori összege  $\mathbf{0}$ , azaz mivel a két  $\mathbf{R}$  erő és  $\mathbf{F}$  összege  $\mathbf{0}$ , ezért e három erő hatásvonalainak a 3.3. fejezetben elmondottak alapján egy közös pontban kell metszeniük egymást. Jelöljük ennek a pontnak a rúd tengelyétől való távolságát  $k_0$ -lal! Írjuk fel a forgatónyomatékok egyensúlyát az A pontra:

$$(154) \quad -(k_0 - r)F + hN - 2rS = 0.$$

Behelyettesítve a (153) kifejezést, végigosztva  $N$ -nel és az  $S/N = \operatorname{tg}\varrho = \mu_0$  helyettesítést elvégezve:

$$(155) \quad -k_0 2\mu_0 + r2\mu_0 + h - 2r\mu_0 = 0$$

Az egyenletet  $k_0$ -ra rendezve kapjuk:

$$(156) \quad k_0 = \frac{h - 2r\mu_0}{2\mu_0} = \frac{h}{2\mu_0}$$

Ha az  $\mathbf{F}$  erő közelebb van a tengelyhez, mint  $k_0$ , akkor, bár az  $\mathbf{S}$  erő abszolút értéke  $S_{\max}$  marad, az  $\mathbf{N}$  erő nagysága lecsökken, hogy a két  $\mathbf{R}$  erő és az  $\mathbf{F}$  erő

hatásvonala egy pontban metszse egymást. Ez azt jelenti, hogy az  $\mathbf{R}$  erő  $\varrho$ -nál nagyobb szöget fog bezárni az  $\mathbf{N}$  erővel, vagyis a súrlódási kúpon kívül kerül, és a csúszka megcsúszik.

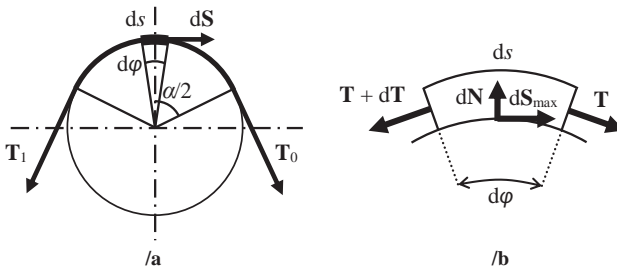
Ha az  $\mathbf{F}$  erőt távolítjuk a tengelytől, akkor az  $\mathbf{N}$  erők úgy fognak csökkenni, hogy a két  $\mathbf{R}$  erő és az  $\mathbf{F}$  erő hatásvonala továbbra is egy pontban metsződjön a 82. ábrán vonalkázott területen belül. Ekkor az  $\mathbf{R}$  erő  $\varrho$ -nál kisebb szöget fog bezárni az  $\mathbf{N}$  erővel, azaz a súrlódási kúpon belülré kerül.

Ha tehát az erő hatásvonalának a tengelytől való távolsága legalább  $k_0$ , akkor lesz a szerkezet önzáró. Mint a (156) egyenletből láthatjuk, ez a távolság nem függ  $\mathbf{F}$  nagyságától, csak a csúszka  $h$  magasságától és a csúszka és a rúd közötti  $\mu_0$  tapadási súrlódási együtthatótól.

Az önzárásnak számos gyakorlati alkalmazása van a csavaroktól (önzáró anyák) kezdve a sziklamászók ereszkedőgépein át a felvonók kötélszakadása esetén működésbe lépő fogókészülékekig.

## 10.4. Kötélsúrlódás

Fektesünk egy hengerre a 83/a ábrán látható módon egy vékony, teljesen hajlékony kötelet! Tegyük fel, hogy úgy húzzuk meg a kötelet az egyik végén  $\mathbf{T}_0$ , a másik végén  $\mathbf{T}_1$  erővel, hogy a kötel egy  $\alpha$  nagyságú középponti szögben (az úgynevezett körülfogási szögben) érintkezik a hengerrel. Legyen  $T_1 > T_0$ . Mivel a henger és a kötel között fellép egy súrlódási erő, bizonyos nagyságú  $T_1 - T_0$  erőkülönbséig a kötel nem csúszik meg. Vizsgáljuk a megcsúszás pillanatát, azaz amikor  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\max}$ .



83. ábra

Vegyük a kötélnak egy nagyon („végtelenül”) kis  $ds$  elemét (83/b ábra), amelyhez tartozó középponti szög  $d\varphi$ . Mivel  $T_1 > T_0$ , azért ennek a kötélemnek a bal oldalát egy kicsivel nagyobb erő terheli, mint a jobb oldalát. Jelöljük a kötélem jobb oldalán a  $T_0$  és  $T_1$  erők eredőjeként ható erőt  $\mathbf{T}$ -vel, a bal oldalán ható ellentétes irányú (kicsivel nagyobb) erőt  $\mathbf{T} + d\mathbf{T}$ -vel. Ezek radiális (hengerpalástra merőleges) komponenseivel az érintkezési felület középpontjában ható  $d\mathbf{N}$  nyomóerő tart egyensúlyt. Mivel  $\mathbf{T} \neq \mathbf{T} + d\mathbf{T}$ , ezért szükséges a súrlódási erő is, hogy a tangenciális (hengerpalást irányú,  $\parallel$ ) erők egyensúlyban legyenek, jelöljük ezt a kisebb erőt, azaz  $\mathbf{T}$  irányába mutató erőt  $d\mathbf{S}_{\max}$ -szal.

Mivel a  $\mathbf{T}$  és a  $\mathbf{T} + d\mathbf{T}$  erők vektorai által közrezárt szög merőleges szárú szög  $d\varphi$ -vel, ezért nagysága szintén  $d\varphi$ . Ez azt is jelenti, hogy mind  $\mathbf{T}$ ,

mind  $\mathbf{T} + d\mathbf{T}$  vízszintessel (a hengerpalást érintőjével) bezárt szöge  $\frac{d\varphi}{2}$ .

Ezek segítségével felírva a tangenciális ( $\parallel$ ) és radiális ( $\perp$ ) komponenseiket:

$$(157) \quad \begin{aligned} T_{\parallel} &= T \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \\ T_{\perp} &= T \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$(158) \quad \begin{aligned} (T + dT)_{\parallel} &= (T + dT) \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \\ (T + dT)_{\perp} &= (T + dT) \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

A tangenciális és a radiális komponensek összege külön-külön is nulla:

$$(159) \quad dS_{\max} = (T + dT) \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - T \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = dT \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$$

$$(160) \quad dN = (T + dT) \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + T \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 2T \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + dT \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$$

Alkalmazzuk a szögfüggvények kis argumentumokra érvényes közelítését. Mivel a szinuszfüggvény kis szögekre közelíthető egy 1 meredekségű egyenessel, ezért a függvényérték helyett vehetjük csak az argumentumát.

A koszinuszfüggvény nagyon kis szögekre egy vízszintes, azaz 0 meredekségű egyenessel közelíthető, a függvény pontos értéke helyett tehát jó közelítéssel vehetjük a 0-beli értékét, 1-et.

Mivel  $d\varphi$  nagyon kicsi, használhatjuk ezt a közelítést. Elvégezve a (159) és a (160) egyenletekben a  $\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi/2$  és  $\cos(d\varphi/2) \approx 1$  helyettesítéseket:

$$(161) \quad dS_{\max} = dT$$

$$(162) \quad dN = 2T \frac{d\varphi}{2} + dT \frac{d\varphi}{2}$$

A (162) egyenlet második tagja másodrendűen kicsi, mivel  $dT$  és  $d\varphi$  szorzatát tartalmazza, ezért ezt is elhanyagolhatjuk.

A (139) egyenletet differenciális alakban felírva, majd a bal oldalába a (161) összefüggést, jobb oldalába a (162) összefüggést behelyettesítve:

$$(163) \quad dS_{\max} = dN \mu_0$$

$$(164) \quad dT = T d\varphi \mu_0$$

Mindkét oldalt leosztva  $T$ -vel megkapjuk a kötél súrlódás differenciálegyenletét:

$$(165) \quad \frac{dT}{T} = \mu_0 d\varphi$$

Mivel a  $\mathbf{T}$  erő nagysága  $T_0$ -tól  $T_1$ -ig változhat, ezért a bal oldalt ezen két határ között integráljuk, a jobb oldalt pedig 0 és  $\alpha$  között, mivel ez a teljes felfekvő kötélrész középponti szöge:

$$(166) \quad \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = \int_0^\alpha \mu_0 d\varphi$$

$$(167) \quad \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = \mu_0 \alpha$$

Mindkét oldalt az  $e$ -adik hatványra emelve (az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt) és  $T_0$ -lal beszorozva kapjuk:

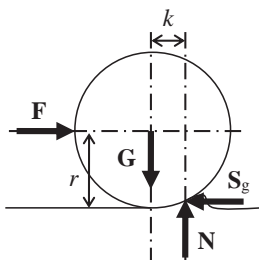
$$(168) \quad T_1 = T_0 e^{\mu_0 \alpha}$$



azaz ha ismerjük az egyik oldali erőt, ki tudjuk számolni azt a legnagyobb vagy legkisebb, másik oldalon alkalmazandó erőt, amely esetében adott körülfogási szögnél és tapadási súrlódási együttható esetében a kötél még éppen nem csúszik meg.

## 10.5. Gördülő ellenállás

Mind a tapadási súrlódásnál, mind a csúszási súrlódásnál kisebb a hengeres testek mozgásakor fellépő gördülő ellenállás nagysága (amelyet gyakran neveznek gördülősúrlódásnak is). Ha a görgő, kerék vagy abroncs, amely a pályán gördül, egyáltalán nem deformálódna mozgás közben (és a pálya sem), akkor ez a fajta ellenállás nem létezne. Azonban mindkettő, bár eltérő mértékben, deformálódik a mozgó szerkezet súlya alatt. A 84. ábrán látható esetben a kerék a keményebb, amely így deformálja a talajt (természetesen a deformáció mértéke általában a rajzon ábrázoltnál jóval kisebb).



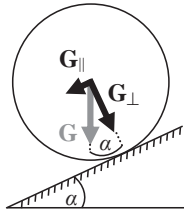
84. ábra

Legfeljebb mekkora  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\max}$  erővel hathatunk a hengerre az egyik oldalán a közepével azonos magasságban ahhoz, hogy éppen ne mozduljon meg? Nevezzük a deformációból származó, az  $\mathbf{F}$  erővel azonos nagyságú, de ellentétes irányban ható erőt gördülő ellenállási erőnek ( $\mathbf{S}_g$ ). Ez szükséges a (22) egyenlet alapján az egyensúlyhoz. Szükséges, de nem elégséges, hiszen hatásvonalaik nem esnek egybe, így erőpárt alkotnak, amely viszont egy eredő forgatónyomatékkal hat a testre. A (24) egyenlet alapján tehát szükséges egy ezzel azonos nagyságú, de ellentétes irányítottágú forgatónyomaték-vektornak is hatnia a testre, hogy egyensúlyban legyen. Ezt egy függőleges irányú erőpár fejtí ki: a súlyerő ( $\mathbf{G}$ ) és a talaj nyomóereje ( $\mathbf{N}$ ),

amelyek szintén azonos nagyságúak, de ellentétes irányítottságúak. A vízszintes erőpár karja jó közelítéssel a henger sugara ( $r$ ). Ezzel szemben a függőleges erőpárnak az alapját ismerjük, karját nem. Jelöljük ez utóbbit, a  $\mathbf{G}$  és az  $\mathbf{N}$  erők hatásvonalának távolságát  $k$ -val. Ezt a mennyiséget a gördülő ellenállás karjának nevezzük. Ha ez 0, azaz  $\mathbf{G}$  és  $\mathbf{N}$  hatásvonala egybeesik, mivel mind a talaj, mind a test tökéletesen merev, akkor bármilyen kis  $\mathbf{F}$  erővel hatunk a testre, az el fog mozdulni. Írjuk fel a két erőpárra az egyensúlyi egyenletet:

$$(169) \quad r F_{\max} = k G$$

azonban  $F_{\max}$  is és  $k$  is ismeretlen. Ez valójában érthető is, mivel a megoldás függ a henger tömege mellett a gördülő súrlódási együtthatótól is. Ez utóbbit tehát kísérletileg kell meghatároznunk, hasonlóan a súrlódási szöghez. Helyezzük tehát a hengert egy változtatható meredekségű lejtőre, és növeljük annak vízszintessel bezárt szögét addig, amíg a henger el nem kezd legördülni (85. ábra).



85. ábra

Fejezzük ki a henger  $\mathbf{G}$  súlyerejét egy lejtőirányú ( $\parallel$ ) és egy arra merőleges ( $\perp$ ) komponenssel:

$$(170) \quad G_{\parallel} = G \sin(\alpha)$$

$$(171) \quad G_{\perp} = G \cos(\alpha)$$

A (169) egyenletben szereplő  $F$  itt a  $G_{\parallel}$ -nak felel meg, a  $G$  pedig a  $G_{\perp}$ -nek. Ezeket behelyettesítve:

$$(172) \quad r G \sin(\alpha) = k G \cos(\alpha)$$

$G$ -vel leosztva az egyenletet (amit megtehetünk, hiszen biztosan nem 0, hiszen ha nulla lenne, eleve nem lenne gördülő ellenállás, vagyis  $k = 0$  lenne) és  $k$ -t kifejezve kapjuk:

$$(173) \quad k = r \operatorname{tg}(\alpha)$$

amelynek ismeretében a (169) egyenletből kifejezhető  $F_{\max}$  értéke.

# Angol kifejezések gyűjteménye

## Magyar–angol

abszolút érték	norm
átmetsző módszer	method of sections
befogás	fixed support
befogott tartó	fixed beam / cantilever beam
befüggesztett (tartó)	drop-in (beam/segment)
Coulomb-súrlódás	dry friction
csomóponti módszer	method of joints
csukló	pin / hinge
csúszási súrlódás	kinetic friction
deformáció	strain
egykonozos kéttámaszú tartó	overhanging beam
egyszerű kéttámaszú tartó	simply supported beam
elsőrendű nyomaték	first moment of area
eredő erő(rendszer)	resultant
erő	force
erőpár	couple
feszültség	stress
forgatónyomaték	torque
gördülő-súrlódás, gördülő ellenállás	rolling resistance
görgő	roller
gyorsulás	acceleration
hajlítónyomatéki ábra	(bending) moment diagram
háromcsuklós szerkezet	three-hinged arch
hatásvonal	line of action

---

helyettesítő erőrendszer	equipollent force system
kábel	cable
kétkonzolos kéttámaszú tartó	double overhanging beam
koncentrált erő	point load
koncentrált forgatónyomaték	ideal / concentrated moment
kötél	rope
megoszló erőrendszer	distributed load
megettámasztás	smooth surface support
merőleges vetület	orthogonal projection
nyíróerőábra	shear force diagram
nyírófeszültség	normal stress
nyomóerőábra	axial force diagram
rácsos szerkezet	truss
reakcióerő	reaction
rúd	bar
rudak közötti csuklós kapcsolat	hinged connection / internal hinge/pin
rúdlánc	serial-link structure
skalárszorzat	dot product
statikailag határozatlan	statically indeterminate
statikailag határozott	statically determinate
súlypont	centre of gravity / centre of mass
súrlódás(i erő)	friction (force)
súrlódási szög	angle of friction
száraz súrlódás	dry friction
támasz	support
tapadási súrlódás	static friction
tartó	beam
terhelés	load
többtámaszú tartó	continuous beam
tömeg	mass
vektoriális szorzat	cross product

**Angol–magyar**

acceleration	gyorsulás
angle of friction	súrlódási szög
axial force diagram	nyomóerőábra
bar	rúd
bending moment diagram	hajlítónyomatéki ábra
beam	tartó
cable	kábel
cantilever beam	befogott tartó
centre of gravity	súlypont
centre of mass	súlypont
concentrated moment	koncentrált forgatónyomaték
continuous beam	többtámaszú tartó
couple	erőpár
cross product	vektoriális szorzat
distributed load	megoszló erőrendszer
dot product	skalárszorzat
double overhanging beam	kétkonzolos kéttámaszú tartó
drop-in (beam/segment)	befüggesztett (tartó)
dry friction	száraz (Coulomb-) súrlódás
equipollent force system	helyettesítő erőrendszer
first moment of area	elsőrendű nyomaték
fixed support	befogás
fixed beam	befogott tartó
force	erő
friction (force)	súrlódási erő
hinge	csukló
hinged connection	rudak közötti csuklós kapcsolat
ideal moment	koncentrált forgatónyomaték
internal hinge/pin	rudak közötti csuklós kapcsolat
kinetic friction	csúszási súrlódás
line of action	hatásvonal

---

load	terhelés
mass	tömeg
method of joints	csomóponti módszer
method of sections	átmetsző módszer
moment diagram	hajlítónyomatéki ábra
norm	abszolút érték
normal stress	nyírófeszültség
orthogonal projection	merőleges vetület
overhanging beam	egykonzolos kéttámaszú tartó
pin	csukló
point load	koncentrált erő
reaction	reakcióerő
resultant	eredő erő(rendszer)
roller	görgő
rolling resistance	gördülősúrlódás, gördülő ellenállás
rope	kötél
serial-link structure	rúdlánc
shear force diagram	nyíróerőábra
simply supported beam	egyszerű kéttámaszú tartó
smooth surface support	megettámasztás
static friction	tapadási súrlódás
statically determinate	statikailag határozott
statically indeterminate	statikailag határozatlan
strain	deformáció
stress	feszültség
support	támasz
three-hinged arch	háromcsuklós szerkezet
torque	forgatónyomaték
truss	rácsos szerkezet

## Irodalom

- MÁRTON András – DOMBAI András (1981): *Műszaki mechanika I.* Budapest, Kosuth Lajos Katonai Főiskola. Főiskolai jegyzet.
- M. CSIZMADIA Béla – NÁNDORI Ernő szerk. (1996): *Mechanika mérnököknek. Statika.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.
- KÓSA Csaba (2003): *Nyugvó rendszerek mechanikája. (Műszaki mechanika I.)* Budapest, BMF BGK
- AGÁRDY Gyula – LUBLÓY László (2006): *Mechanika I. Statika.* Győr, Széchenyi István Egyetem. Elektronikus jegyzet.



A Dialóg Campus Kiadó a Nemzeti Közszolgálati Egyetem  
könyvkiadója.



Nordex Nonprofit Kft. – Dialóg Campus Kiadó  
[www.dialogcampus.hu](http://www.dialogcampus.hu)  
[www.uni-nke.hu](http://www.uni-nke.hu)  
1083 Budapest, Ludovika tér 2.  
Telefon: (30) 426 6116  
E-mail: [kiado@uni-nke.hu](mailto:kiado@uni-nke.hu)

A kiadásért felel: Petró Ildikó ügyvezető  
Felelős szerkesztő: Karácsony Fanni  
Olvasószerkesztő: Jakab Géza  
Tördelőszerkesztő: Fehér Angéla  
Nyomdai kivitelezés: Nordex Nonprofit Kft.

ISBN 978-615-6020-03-1 (nyomtatott)  
ISBN 978-615-6020-04-8 (elektronikus)

Több mint tíz év telt el azóta, hogy a Nemzeti Közszolgálati Egyetemen, pontosabban egyik elődintézményében, a Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetemen egyetemi jegyzet készült a műszaki mechanika témakörében, azon belül is statikából.

Ez idő alatt nemcsak az ebben a témakörben tárgyalt jelenségeknek, műszaki megoldásoknak jelentek meg újabb alkalmazási területei, hanem az egyetemi képzésben is több változás történt. Mivel új szakokon új tárgyak oktatása folyik, a változó tantárgyi követelményekhez az oktatási anyagoknak is igazodniuk kell. Ennek a célnak kíván megfelelni a jegyzet, amely – célirányosan – az NKE Hadtudományi és Honvédtiszt-képző Karon a katonai logisztika BSc szakon oktatott Mechanika I. kurzus tananyagát foglalja magában.

A leglényegesebb angol szakkifejezések nemcsak első szövegközi előfordulásukkor jelennek meg, hanem összegyűjtve is megtalálhatók a jegyzet végén.